МАТЕМАТИКА

ПОШАГОВАЯ ПОДГОТОВКА

ЕГЭ

ЭФФЕКТИВНАЯ
МЕТОДИКА
САМОПОДГОТОВКИ

- НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
- ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ
- ТИПОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ

НЕДЕЛЯ ЗА НЕДЕЛЕЙ

А.Н. РОГАНИН, Ю.А. ЗАХАРИЙЧЕНКО,
Л.И. ЗАХАРИЙЧЕНКО

МАТЕМАТИКА

ПОШАГОВАЯ ПОДГОТОВКА

ЕГЭ

ЭФФЕКТИВНАЯ
МЕТОДИКА
САМОПОДГОТОВКИ

НЕДЕЛЯ ЗА НЕДЕЛЕЙ

МОСКВА 2020

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
Р59

Роганин, Александр Николаевич.

Р59 ЕГЭ. Математика : пошаговая подготовка / А. Н. Роганин, Ю. А. Захарийченко, Л. И. Захарийченко. — Москва : Эксмо, 2020. — 320 с. — (ЕГЭ. Неделя за неделей).

ISBN 978-5-04-112892-0

Издание содержит все темы школьного курса математики, необходимые для сдачи ЕГЭ.

Весь материал чётко структурирован и разделён на 36 логических блоков (недель), включающих необходимые теоретические сведения, задания для самоконтроля в виде схем и таблиц, а также в форме ЕГЭ. Изучение каждого блока рассчитано на 2—3 самостоятельных занятия в неделю в течение учебного года. Кроме того, в пособии приводятся тренировочные варианты, цель которых — оценить уровень знаний.

Данное пособие поможет организовать пошаговую подготовку учащихся старших классов к ЕГЭ по математике.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-112892-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Результаты единого государственного экзамена исключительно важны для выпускника и будущего абитуриента — они учитываются в школьном аттестате и при поступлении в вузы. Получить максимальный балл на ЕГЭ непросто, но с каждым годом увеличивается число выпускников, которые блестяще с этим справляются.

Перед вами уникальное учебное пособие, разработанное педагогами-репетиторами для выпускников, их родителей и коллег-учителей. Издание содержит весь материал школьного курса по математике, необходимый для сдачи ЕГЭ, в соответствии с кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения ЕГЭ. Пособие состоит из 3 частей.

Часть 1 — пробный тест в формате ЕГЭ, который позволит учащемуся оценить свой уровень знаний в начале подготовки.

Часть 2 — материал для повторения, проверки и закрепления знаний школьного курса по математике с тестовыми заданиями в формате ЕГЭ. Программа самоподготовки разделена на 36 недель, что позволит учащемуся систематизировать самостоятельную работу в течение года. Объём теоретического материала и заданий каждой недели отбирался авторами таким образом, чтобы проработка его занимала у учащегося не более 2 часов в неделю.

Часть 3 — контрольный тест в формате ЕГЭ, который продемонстрирует уровень подготовки перед сдачей самого экзамена.

Уважаемые выпускники!

Чтобы успешно сдать ЕГЭ, необходимы глубокие знания по математике и умение организовывать свою работу.

Итак,

1. **Что вы знаете?** Выполните пробный тест. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из 2 частей, включающих 21 задание. Часть 1 состоит из 9 заданий, которые предполагают краткий ответ. Часть 2 включает 5 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом. Максимальное количество баллов — 34. Бланк для ответов в конце теста поможет потренироваться в заполнении аналогичного бланка на самом экзамене, ведь от правильности и аккуратности его заполнения во многом зависит ваша будущая оценка. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. Будьте честны с собой! Как вы усвоили материал школьной программы? Если вы не набрали максимального количества баллов, то...
2. **Что делать?** Весь материал пособия разделен на 36 недель. Выполните тестовые задания, расположенные на полях. Внимательно прочитайте формулировку заданий и постарайтесь понять смысл вопроса. Если вы поняли вопрос, то, скорее всего, вы знаете и ответ на него. Если вы испытываете затруднения при выполнении заданий текущей недели, то повторите теоретический материал. Затем попробуйте выполнить эти задания с опорой на теоретический материал, расположенный рядом. В завершение недели выполните задания из раздела «Контроль знаний», которые позволят закрепить и систематизировать учебный материал недели. В конце раздела проверьте свои знания, выполнив задания повышенной сложности.
3. **Как провести репетицию ЕГЭ?** Повторив весь школьный курс, представьте себя на экзамене. Пройдите последний тест, подобный тому, который вы будете проходить во время

ЕГЭ, в условиях, максимально приближенных к условиям экзамена. Сидя дома за рабочим столом, представьте себя на экзамене — тогда на ЕГЭ вы будете чувствовать себя как дома.

Верьте в свои силы! Желаем удачи!

Уважаемые родители!

Чем вы можете помочь своему ребенку?

1. **Организовать систематическую и последовательную подготовку к ЕГЭ.** Большинство подростков ещё не могут правильно планировать своё время, всё откладывают «на потом». От правильного планирования занятий во многом зависит результат подготовки. Выделить 2 часа в неделю в плотном графике современного школьника легче, чем повторить весь материал школьного курса за несколько дней до экзамена.
2. **Создать благоприятную психологическую обстановку дома.** Даже для самого ответственного ученика экзамен — это испытание, стресс. «Домашняя психотерапия» — это помощь любящих и заботливых близких людей, родителей, которые проверят, напомнят, убедят, уберегут от бессонных ночей накануне экзамена, успокоят и поддержат.
3. **Быть рядом.** Мы не призываем родителей учить вместе с ребёнком темы и ответы на вопросы. Это первое «взрослое» испытание для учащегося, а не для его родителей! Принимайте участие в делах вашего ребёнка, интересуйтесь его душевным состоянием, настроением. Стараясь помочь, вы дадите своим детям уроки любви, сочувствия, взаимопомощи, научите спокойно и уверенно преодолевать трудности.

Желаем вам удачи и терпения!

Уважаемые коллеги-учителя!

В начале каждой недели приведены темы для повторения из кодификатора элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения ЕГЭ. Каждому разделу и элементу содержания, проверяемым на ЕГЭ, соответствует несколько типов заданий. Задания базового уровня сложности расположены рядом с соответствующим теоретическим материалом. Задания повышенного и высокого уровней сложности расположены в конце каждого раздела. Два тренировочных теста помогут каждому учащемуся определить свой уровень подготовки.

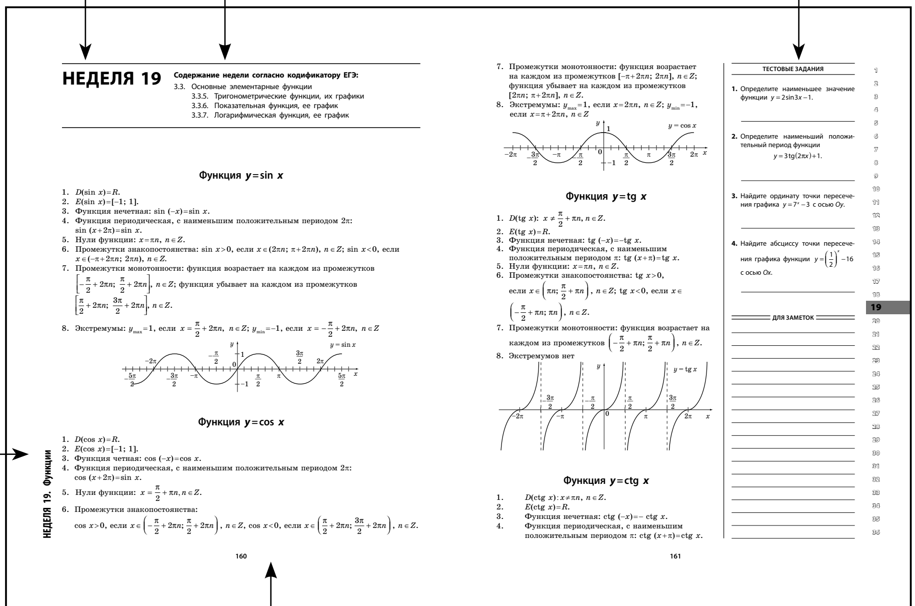
Конечно, ЕГЭ требует специальной подготовки по предмету, но готовиться нужно и к самой форме проведения экзамена. Также при этом необходимы обобщение и систематизация изученного материала. Следует обратить особое внимание на пробелы в знаниях учащегося, допущенные при изучении школьной программы, и устранить их. Надеемся, что наше пособие будет полезно вам в вашей ежедневной работе.

Желаем творческих успехов!

Номер недели

Элементы содержания кодификатора ЕГЭ

Задания базового уровня сложности



НЕДЕЛЯ 19 Содержание недели согласно кодификатору ЕГЭ:
3.3. Основные элементарные функции
3.3.5. Тригонометрические функции, их графики
3.3.6. Показательная функция, ее график
3.3.7. Логарифмическая функция, ее график

Функция $y = \sin x$

Функция $y = \cos x$

Функция $y = \text{tg}\, x$

Функция $y = \text{ctg}\, x$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Определите наименьшее значение функции $y = 2\sin 3x - 1$.
2. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\,\text{tg}(2\pi x) + 1$.
3. Найдите ординату точки пересечения графика $y = 7^x - 3$ с осью Oy.
4. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16$ с осью Ox.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

НЕДЕЛЯ 19. Функции

160

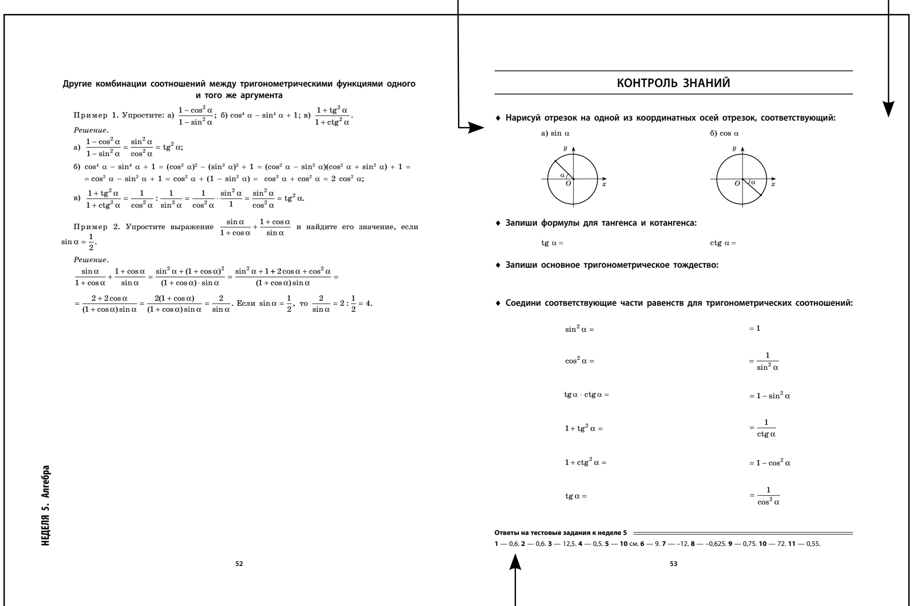
161

Повторяемый раздел

Теоретический материал для повторения

Задания для закрепления и систематизации знаний

Номер текущей недели



Другие комбинации соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

- Нарисуй отрезок на одной из координатных осей отрезок, соответствующий:
- Запиши формулы для тангенса и котангенса:
- Запиши основное тригонометрическое тождество:
- Соедини соответствующие части равенств для тригонометрических соотношений:

Ответы на тестовые задания к неделе 5

НЕДЕЛЯ 5. Алгебра

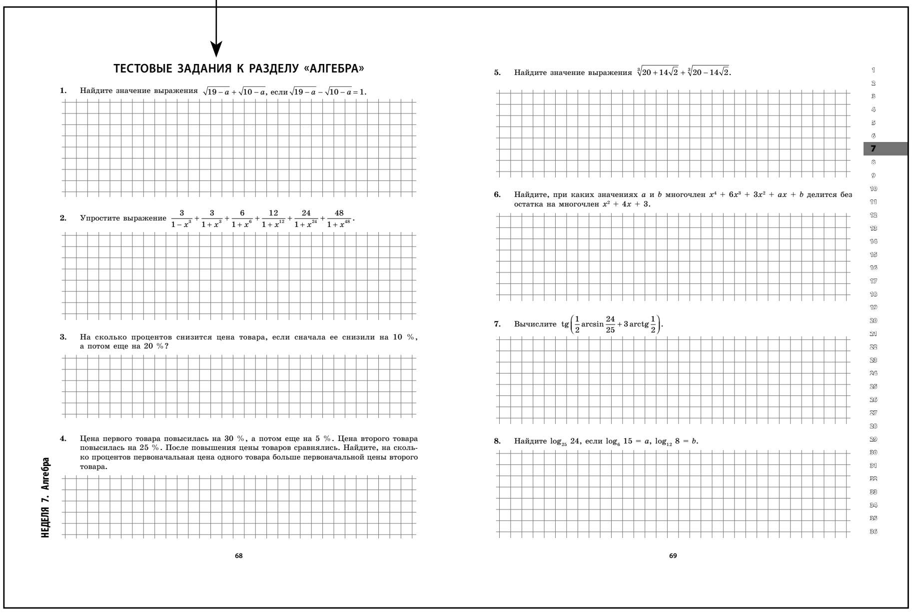
52

53

Ответы к заданиям базового уровня сложности текущей недели

Предисловие

Задания повышенного и высокого уровней сложности к изученному разделу



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «АЛГЕБРА»

1. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a}+\sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a}-\sqrt{10-a}=1$.

2. Упростите выражение $\frac{3}{1-x^3}+\frac{3}{1+x^3}+\frac{6}{1+x^6}+\frac{12}{1+x^{12}}+\frac{24}{1+x^{24}}+\frac{48}{1+x^{48}}$.

3. На сколько процентов снизится цена товара, если сначала ее снизили на 10 %, а потом еще на 20 %?

4. Цена первого товара повысилась на 30 %, а потом еще на 5 %. Цена второго товара повысилась на 25 %. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены второго товара.

НЕДЕЛЯ 7. Алгебра

68

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

6. Найдите, при каких значениях a и b многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на многочлен x^2+4x+3.

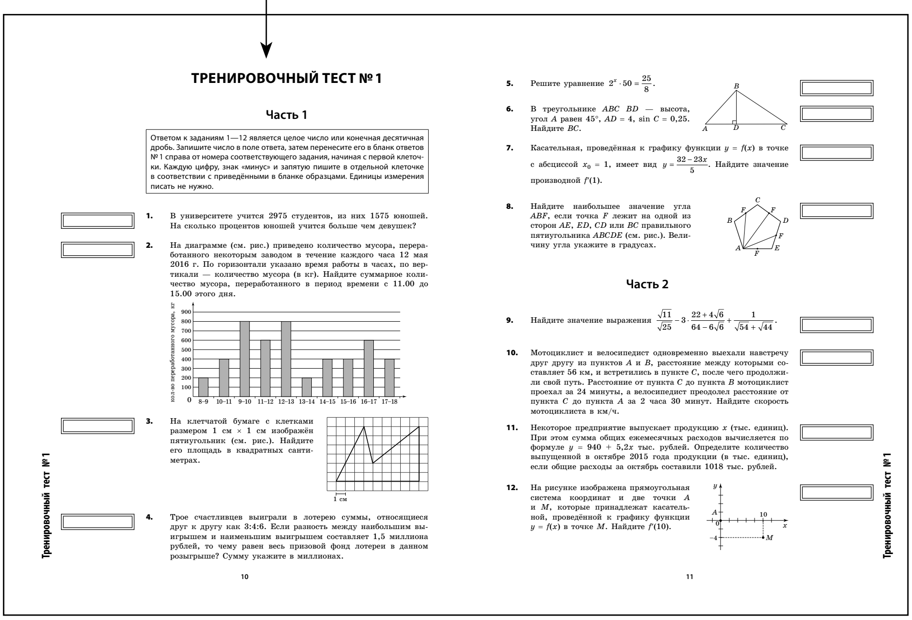
7. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}+3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

8. Найдите $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 8 = b$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

69

Тренировочный тест в формате ЕГЭ



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ № 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

1. В университете учится 2975 студентов, из них 1575 юношей. На сколько процентов юношей учится больше чем девушек?

2. На диаграмме (см. рис.) приведено количество мусора, переработанного некоторым заводом в течение каждого часа 12 мая 2016 г. По горизонтали указано время работы в часах, по вертикали — количество мусора (в кг). Найдите суммарное количество мусора, переработанного в период времени с 11.00 до 15.00 этого дня.

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён пятиугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

4. Трое счастливцев выиграли в лотерею суммы, относящиеся друг к другу как 3:4:6. Если разность между наибольшим выигрышем и наименьшим выигрышем составляет 1,5 миллиона рублей, то чему равен весь призовой фонд лотереи в данном розыгрыше? Сумму укажите в миллионах.

Тренировочный тест № 1

10

5. Решите уравнение $2^x \cdot 50 = \frac{25}{8}$.

6. В треугольнике ABC BD — высота, угол A равен 45°, $AD = 4$, $\sin C = 0{,}25$. Найдите BC.

7. Касательная, проведённая к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, имеет вид $y=\frac{32-23x}{5}$. Найдите значение производной $f'(1)$.

8. Найдите наибольшее значение угла ABF, если точка F лежит на одной из сторон AE, ED, CD или BC правильного пятиугольника $ABCDE$ (см. рис.). Величину угла укажите в градусах.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{25}}-3\cdot\frac{22+4\sqrt{6}}{64-6\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{54}+\sqrt{44}}$.

10. Мотоциклист и велосипедист одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 56 км, и встретились в пункте C, после чего продолжили свой путь. Расстояние от пункта C до пункта B мотоциклист проехал за 24 минуты, а велосипедист преодолел расстояние от пункта C до пункта A за 2 часа 30 минут. Найдите скорость мотоциклиста в км/ч.

11. Некоторое предприятие выпускает продукцию x (тыс. единиц). При этом сумма общих ежемесячных расходов вычисляется по формуле $y = 940 + 5{,}2x$ тыс. рублей. Определите количество выпущенной в октябре 2015 года продукции (в тыс. единиц), если общие расходы за октябрь составили 1018 тыс. рублей.

12. На рисунке изображена прямоугольная система координат и две точки A и M, которые принадлежат касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке M. Найдите $f'(10)$.

Тренировочный тест № 1

11

Предисловие

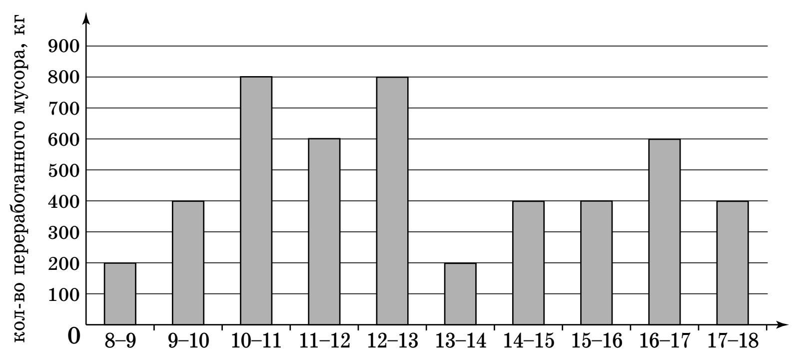
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ № 1

Часть 1

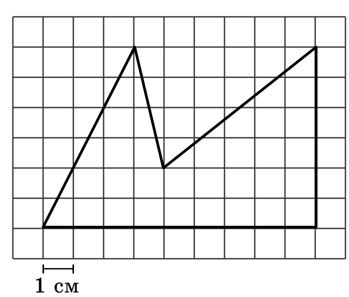
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

1. В университете учится 2975 студентов, из них 1575 юношей. На сколько процентов юношей учится больше чем девушек?

2. На диаграмме (см. рис.) приведено количество мусора, переработанного некоторым заводом в течение каждого часа 12 мая 2016 г. По горизонтали указано время работы в часах, по вертикали — количество мусора (в кг). Найдите суммарное количество мусора, переработанного в период времени с 11.00 до 15.00 этого дня.



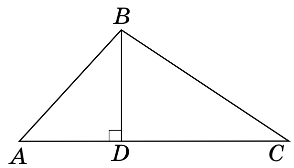
3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён пятиугольник (см. рис.). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



4. Трое счастливцев выиграли в лотерею суммы, относящиеся друг к другу как 3:4:6. Если разность между наибольшим выигрышем и наименьшим выигрышем составляет 1,5 миллиона рублей, то чему равен весь призовой фонд лотереи в данном розыгрыше? Сумму укажите в миллионах.

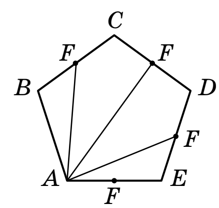
5. Решите уравнение $2^x \cdot 50 = \dfrac{25}{8}$.

6. В треугольнике ABC BD — высота, угол A равен $45°$, $AD = 4$, $\sin C = 0{,}25$. Найдите BC.



7. Касательная, проведённая к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, имеет вид $y = \dfrac{32 - 23x}{5}$. Найдите значение производной $f'(1)$.

8. Найдите наибольшее значение угла ABF, если точка F лежит на одной из сторон AE, ED, CD или BC правильного пятиугольника $ABCDE$ (см. рис.). Величину угла укажите в градусах.



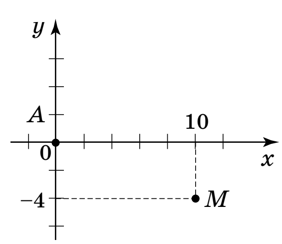
Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{25}} - 3 \cdot \dfrac{22 + 4\sqrt{6}}{64 - 6\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{54} + \sqrt{44}}$.

10. Мотоциклист и велосипедист одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 56 км, и встретились в пункте C, после чего продолжили свой путь. Расстояние от пункта C до пункта B мотоциклист проехал за 24 минуты, а велосипедист преодолел расстояние от пункта C до пункта A за 2 часа 30 минут. Найдите скорость мотоциклиста в км/ч.

11. Некоторое предприятие выпускает продукцию x (тыс. единиц). При этом сумма общих ежемесячных расходов вычисляется по формуле $y = 940 + 5{,}2x$ тыс. рублей. Определите количество выпущенной в октябре 2015 года продукции (в тыс. единиц), если общие расходы за октябрь составили 1018 тыс. рублей.

12. На рисунке изображена прямоугольная система координат и две точки A и M, которые принадлежат касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке M. Найдите $f'(10)$.



Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. Найдите все пары $(x; y)$, которые являются решениями неравенства $y + y^2 + \sqrt{y - 3xy - 4x^2} \leqslant 7xy$.

14. В треугольнике ABC биссектрисы BD и AE углов B и A пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AC, если $AB = 12$, $OA : OE = 3 : 2$ и $AD : DC = 6 : 7$.

15. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} + \left(a^2 - 6a\right)\sin 2y = 4, \\ 2^x - 8\sin y \cos y = a \end{cases}$$ имеет решения?

16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, у которой боковое ребро в два раза больше стороны основания. Точка G принадлежит ребру SB, а точки E, F, K, L — середины рёбер AD, AS, CS, DC соответственно. Найдите отношение площади сечения $EFGKL$ к площади основания $ABCD$.

17. На сколько процентов увеличится реальная заработная плата, если цены на все продовольственные и непродовольственные товары уменьшатся на $20\,\%$?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\arccos\left(1 + |x - a|\right) = 2x^2 + 5a - 18$ имеет решение.

19. Натуральное число N, состоящее из 2012 цифр, кратно 9. Пусть x — сумма цифр числа N, y — сумма цифр числа x, z — сумма цифр числа y. Найдите все возможные значения числа z.

Ответы к тренировочному тесту № 1

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	12,5	**7**	−4,6
2	2000	**8**	108
3	33	**9**	−1,2
4	6,5	**10**	40
5	−4	**11**	15
6	16	**12**	−0,4

13. *Ответ:* $(0;\ 0)$; $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Ответ неверен, но получена оценка выражения с использованием области определения подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

14. *Ответ:* 9.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения длины стороны треугольника правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

15. *Ответ:* $a \in \left(2-2\sqrt{3}; 2\right] \cup \left[6; +\infty\right)$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения количества корней правильный (графический), но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

16. *Ответ:* $\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неверен, но правильно найдены площадь многоугольника $EFGKL$ либо площадь его ортогональной проекции на плоскость основания пирамиды.	2
Ответ неверен, но правильно найдены некоторые стороны многоугольника $EFGKL$ либо косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью основания пирамиды.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

17. *Ответ:* 25.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Ответ получен, решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности, в результате которых ответ может быть неверным.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

18. *Ответ:* $a_1 = -4{,}5$; $a_2 = 2$.

Указания к оцениванию	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ получен, решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности, в результате которых ответ может быть неверным.	3
Верно получены условия на значения a с применением области значений обратной тригонометрической функции.	2
Верно получены соотношения между переменными x и a с применением области определения обратной тригонометрической функции.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. *Ответ:* $z = 9$.

Указания к оцениванию	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Верно получены условия на значения z, но недостаточно обоснована единственность.	3
Верно получены условия на значения y.	2
Верно получены условия на значения x.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

НЕДЕЛЯ 1

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.1. Числа, корни и степени
 1.1.1. Целые числа
 1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа
1.4 Преобразования выражений
 1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа

АЛГЕБРА

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа, которые используются для счета предметов: 1, 2, 3, … . $N=\{1; 2; 3; \ldots\}$ образуют множество **натуральных чисел**.

Натуральные числа 1, 2, 3, …, противоположные им числа –1, –2, –3, … и число 0 образуют множество целых чисел. $Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество **целых чисел**.

Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **рациональными**. Множество рациональных чисел обозначают символом Q. Любое рациональное число — бесконечная периодическая десятичная дробь.

Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **иррациональными**. Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби. Например: $\sqrt{2}$, $\pi=3{,}1415926\ldots$, $e=2{,}7182818\ldots$ — иррациональные числа.

Объединение рациональных и иррациональных чисел называют **действительными числами**. Множество действительных чисел обозначают символом R. $N \supset Z \supset Q \supset R$. Действительные числа — бесконечные десятичные дроби.

Арифметические действия над натуральными числами

В арифметике определены 2 основных арифметических действия: сложение и умножение.

Действие / Закон	Сложение $\underbrace{s}_{\text{сумма}} = \underbrace{a}_{\text{слагаемое}} + \underbrace{b}_{\text{слагаемое}}$	Умножение $\underbrace{p}_{\text{произведение}} = \underbrace{a}_{\text{множитель}} \cdot \underbrace{b}_{\text{множитель}}$
Переместительный, или коммутативный закон	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Сочетательный, или ассоциативный закон	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Распределительный, или дистрибутивный закон	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Делимость натуральных чисел. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Число делится на	2	если его последняя цифра чётная
	5	если его последняя цифра 0 или 5
	3	если сумма его цифр делится на 3
	9	если сумма его цифр делится на 9
	10	если его последняя цифра 0
	4	если число, составленное из последних двух цифр, делится на 4
	25	если число, составленное из последних двух цифр, делится на 25

Модуль (абсолютная величина) числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от начала отсчета до точки, изображающей число a. $|a - b|$ — расстояние от точки a до точки b.

$$|a| \geqslant 0; \quad |-a| = |a|; \quad a \leqslant |a|;$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|;$$

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|;$$

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|;$$

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|;$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}; \; b \neq 0;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$|a^n| = |a|^n; \; n \in N;$$

$$|a|^2 = a^2;$$

$$|a|^{2k} = a^{2k}, \; k \in N$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Шоколадный батончик стоит 6 рублей 30 копеек. Какое наибольшее число шоколадных батончиков можно купить на 50 рублей?

2. Фёдор решил подарить Екатерине на праздник букет из нечётного числа роз. Одна роза стоит 70 рублей. Из какого наибольшего числа роз он сможет купить Екатерине букет на 400 рублей?

3. Вычислите значение выражения

$$8^4 \cdot 3^7 : 12^5.$$

4. Упростите выражение $\dfrac{(7x^3)^2 \cdot (3y)^3}{(21x^2y)^3}$.

5. Ручка стоит 5 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число таких ручек можно купить на 70 рублей?

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Дезодорант стоит 180 рублей. Какое наибольшее число дезодорантов можно купить на 800 рублей во время распродажи, если скидка составляет 25 %?

____

7. Карандаш стоит 60 рублей. Какое наибольшее число таких карандашей можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 15 %?

____

8. Линейка стоит 10 рублей. Какое наибольшее число таких линеек можно будет купить на 300 рублей после повышения цены на 20 %?

____

9. Флакон шампуня стоит 120 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Таблица знаков при арифметических действиях с действительными числами

При умножении	При делении
$(+)\cdot(+)=(+)$	$(+):(+)=(+)$
$(-)\cdot(-)=(+)$	$(-):(-)=(+)$
$(+)\cdot(-)=(-)$	$(+):(-)=(-)$
$(-)\cdot(+)=(-)$	$(-):(+)=(-)$

Правило раскрытия скобок

Если перед скобками стоит знак «+», то, раскрывая скобки, нужно сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключённой в скобки. Например:

$$2{,}3+(15{,}6-11)=2{,}3+15{,}6-11=$$
$$=17{,}9-11=6{,}9.$$

Если перед скобками знак «−», то, раскрывая скобки, нужно знаки слагаемых поменять на противоположные. Например:

$$36{,}28-(-29{,}77+36{,}28)=36{,}28+29{,}77-36{,}28=$$
$$=(36{,}28-36{,}28)+29{,}77=29{,}77.$$

ДРОБИ

Основное свойство дроби

Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$ называются равными, если

$$a\cdot n=b\cdot m.$$

Например, $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ (так как $3\cdot 10=5\cdot 6$); $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ (так как $5\cdot 21=7\cdot 15$).

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}.$$

Например, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ (дробь справа получается из дроби слева умножением её числителя и знаменателя на 2); $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ разделили числитель и знаменатель дроби слева на 6).

Сравнение обыкновенных дробей

Чтобы сравнить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сравнить их числители: из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше, и меньше та, числитель которой меньше. Например, $\frac{3}{7} > \frac{1}{7}$, т. к. 3 > 1.

Если у дробей числители равны, то больше та дробь, знаменатель которой меньше, и меньше та, знаменатель которой больше. Например, $\frac{5}{11} < \frac{5}{7}$, т. к. 11 > 7.

Арифметические действия с обыкновенными дробями

Сложение (вычитание) дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}, \quad \frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}.$$

Например: $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5+3}{11} = \frac{8}{11}$.

Сложение (вычитание) дробей с разными знаменателями

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}, \quad \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q}.$$

Например: $\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{^{3/}5}{12} + \frac{^{2/}7}{18} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{15+14}{36} = \frac{29}{36}$.

При **сложении смешанных дробей** нужно сложить отдельно целые и дробные части.

Например: $5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = 5 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

При **вычитании смешанных дробей** следует различать следующие случаи:

а) дробная часть уменьшаемого больше или равна дробной части вычитаемого. В этом случае из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части уменьшаемого — дробную часть вычитаемого. Например:

$$5\frac{5}{8} - 3\frac{5}{12} = 5 - 3 + \frac{^{3/}5}{8} - \frac{^{2/}5}{12} = 2 + \frac{15-10}{24} = 2 + \frac{5}{24} = 2\frac{5}{24};$$

б) дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого. В этом случае одну из единиц целой части уменьшаемого нужно заменить равной ей дробью. Например:

$$5\frac{6}{11} - 2\frac{9}{11} = 5 - 2 + \frac{6}{11} - \frac{9}{11} = 3 + \frac{6-9}{11} = 2 + 1 + \frac{6-9}{11} = 2 + \frac{11}{11} + \frac{6-9}{11} = 2\frac{11+6-9}{11} = 2\frac{8}{11}.$$

Умножение дробей

Умножение обыкновенных дробей: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Полученную дробь, если это возможно, сокращают.

Например: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 13} = \frac{6}{65}$.

При **умножении смешанных дробей** их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем перемножают.

Например: $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{4}=\frac{7}{2}\cdot\frac{17}{4}=\frac{7\cdot 17}{2\cdot 4}=\frac{119}{8}=14\frac{7}{8}$.

Деление дробей

Деление дроби на дробь: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$. Например: $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 2}=\frac{21}{10}$; $\frac{3}{7}:\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{7\cdot 6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Два числа называются **взаимно обратными**, если их произведение равно 1.

Если нужно разделить дробь на дробь, в случае когда одна или обе дроби — **смешанные**, то нужно предварительно представить смешанную дробь в виде неправильной дроби. Например: $2\frac{3}{5}:1\frac{1}{2}=\frac{13}{5}:\frac{3}{2}=\frac{13\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{26}{15}=1\frac{11}{15}$.

Десятичная дробь

Дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д., называют **десятичной дробью**. Например, $\frac{1}{10}=0{,}1$; $\frac{31}{100}=0{,}31$; $\frac{9}{1000}=0{,}009$. Можно сказать, что **десятичная дробь** — это другая форма записи дроби со знаменателем 10^n, где n — натуральное число.

Для десятичных дробей вводится понятие значащей цифры числа.

Например, в числе 17,5103 шесть значащих цифр (1,7,5,1,0,3); в числе 0,9007 четыре значащие цифры (9,0,0,7); в числе 0,007 одна значащая цифра (7).

ПРОЦЕНТЫ

Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком «%». Если данное число принято за единицу, то 1% составляет 0,01 этого числа, 10% составляют 0,1 числа, 25% составляют 0,25 числа (или $\frac{1}{4}$ числа) и т. д. Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100. Например, 7% = 0,07; 150% = 1,5; 350% = 3,5; 0,2% = 0,002.

Нахождение процентов данного числа

Чтобы найти p% от числа a, надо a умножить на $\frac{p}{100}$: $x=a\cdot\frac{p}{100}$. Например, 60% от 90 составляют $90\cdot\frac{60}{100}=54$.

Нахождение числа по его процентам

Если известно, что p% числа a равно x, то число a можно найти по формуле $a=x\cdot\frac{100}{p}$. Например, если 5% вклада в сбербанк составляют 250 долларов, то этот вклад равен $250\cdot\frac{100}{5}=5000$ (долларов).

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Вспомните признаки делимости чисел. Заполните таблицу:**

Число	делится на
216	
522	
630	
726	
126	

Число	делится на
95	
69	
476	
625	
198	

♦ **Запишите формулы для арифметических действий с обыкновенными дробями:**

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Ответы на тестовые задания к неделе 1

1 — 7. **2** — 5. **3** — 36. **4** — $\frac{1}{7}$. **5** — 12. **6** — 5. **7** — 7. **8** — 25. **9** — 8.

НЕДЕЛЯ 2

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.4 Преобразования выражений

1.4.1. Преобразования выражений, включающих арифметические операции

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Область определения алгебраического выражения

Множество значений переменых, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называется **областью определения алгебраического выражения**. Например, областью определения выражения $\frac{5}{2x+6}$ является множество всех значений $x \in R$, кроме $x = -3$, т. е. $x \in R\backslash -3$. Область определения выражения $\frac{7a^3b^5}{a-b}$ есть множество пар чисел $(a; b)$, для которых $a \neq b$.

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить. При умножении выражений нужно помнить *правила знаков*, а именно:

$$(+x) \cdot (+y) = xy;$$
$$(-x) \cdot (-y) = xy;$$
$$(+x) \cdot (-y) = -xy;$$
$$(-x) \cdot (+y) = -xy.$$

Деление с остатком многочлена на многочлен

Такое деление возможно, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе. Чтобы найти частное двух многочленов, нужно расположить многочлен делимого и многочлен делителя по убывающим степеням переменной и выполнить деление.

Располагаем оба многочлена по убывающим степеням и записываем рядом, отделив в столбик. Сначала делим старший член делимого на старший член делителя и записываем результат под горизонтальной чертой. Затем под делимым подписываем произведение делителя на указанный результат и вычитаем это произведение из делимого. Теперь задача свелась к делению нового многочлена меньшей степени на прежний делитель. Дальнейшие действия аналогичны описанным. В результате либо многочлен нацело разделится на многочлен ($r(x) = 0$), либо получится остаток.

Пример. Разделить $x^3 + x - 2$ на $(x - 1)$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x + 2 \\ x^2 + x - 2 & \\ -\underline{x^2 - x} & \\ 2x - 2 & \\ -\underline{2x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Отсюда $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$. Таким образом, многочлен $x^3 + x - 2$ нацело делится на многочлен (двучлен) $x - 1$.

Ответ: $\dfrac{x^3 + x - 2}{x - 1} = x^2 + x + 2.$

Формулы сокращённого умножения

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2;$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2;$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz);$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3;$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2);$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2);$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Примеры.

1. $(4a)^2 - (x + a)^2 = (4a - (x + a))(4a + (x + a)) =$
   $= (3a - x)(5a + x).$
2. $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3 =$
   $= (2x - 5y) \cdot ((2x)^2 + 2x5y + (5y)^2) =$
   $= (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2).$
3. $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2) =$
   $= (3a - 2b) \cdot ((3a)^2 + 3a \cdot 2b + (2b)^2) =$
   $= (3a)^3 - (2b)^3 = 27a^3 - 8b^3.$

Выделение полного квадрата двучлена из квадратного трёхчлена

Пусть дан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ и нужно преобразовать его к виду $a(x + m)^2 + n$. Для этого поступаем следующим образом:

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите значение выражения

$$3a + b + 9c,$$

если $9a + b = 21$, $2b + 27c = 6$.

____

2. Найдите значение выражения $p(a - 3) - p(a + 3)$, если $p(a) = 4a$.

____

3. Найдите значение выражения $4q(y - 5) - q(4y)$, если $q(y) = y - 2$.

____

4. Найдите значение выражения $7(t(3a) - 3t(a + 7))$, если $t(a) = a - 14$.

____

5. Найдите $p(x - 7) + p(13 - x)$, если $p(x) = 2x + 1$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Примеры.

1. $x^2-4x+1=x^2-2x2+2^2-2^2+1=(x-2)^2-4+1=(x-2)^2-3.$

Ответ: $x^2-4x+1=(x-2)^2-3.$

2. $-2x^2+7x-3=-2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right)=-2\left(x^2-2x\frac{7}{4}+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right)=-2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}+\frac{3}{2}\right)=$

$$=-2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{25}{8}.$$

Ответ: $-2x^2+7x-3=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{25}{8}.$

Формулы, которые используют при разложении многочлена на множители

Действие	Формула	Пример
Вынесение общего множителя за скобки	$ab+ac=a(b+c)$	$8a^3-12ab^2=4a(2a^2-3b^2)$
Группировка	$ac+ad+bc+bd=$ $=a(c+d)+b(c+d)=$ $=(c+d)(a+b)$	$a^2-ab-3a+3b=a(a-b)-$ $-3(a-b)=(a-b)(a-3)$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$16a^4-64b^6=(4a^2-8b^3)\times$ $\times(4a^2+8b^3)$
Разложение на множители трёхчлена	$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2=$ $=(a\pm b)(a\pm b)$	$a^4-6a^2+9=(a^2)^2-6a^2+3^2=$ $=(a^2-3)^2=(a^2-3)(a^2+3)$
Куб суммы (разности)	$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=$ $=(a\pm b)(a\pm b)(a\pm b)=$ $=(a\pm b)^3$	$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3=$ $=(x-1)(x-1)(x-1)$
Сумма (разность) кубов	$a^3\pm b^3=(a\pm b)\times$ $\times(a^2\mp ab+b^2)$	$a^3+0{,}008=(a+0{,}2)\times$ $\times(a^2-0{,}2a+0{,}04)$

Разложение многочлена на множители

Разложением многочлена на множители называется преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов, среди которых могут быть и одночлены.

Первый способ. Вынесение общего множителя за скобки: $10x^2y-5xy^3=5xy(2x-y^2)$.

Второй способ. Способ группировки, состоящий в том, что объединяются в группы члены, имеющие общие множители, и выносится за скобки общий множитель каждой из групп.

Если после такого преобразования общий множитель окажется у всех получившихся групп, то его выносят за скобки:

$5(x - 3y)^2 - 4x + 12y = 5(x - 3y)^2 - 4(x - 3y) = (x - 3y)(5(x - 3y) - 4) =$
$= (x - 3y)(5x - 15y - 4)$; $(x - 3y)$ — общий множитель.

Третий способ. Применение формул сокращённого умножения:

$a^2 + b^2 + 2ab - 4c^2 = (a + b)^2 - (2c)^2 = (a + b - 2c)(a + b + 2c)$.

Четвёртый способ. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители, если известны его корни. Забегая вперёд, заметим, что если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то он может быть разложен на линейные множители следующим образом: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Например:

$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, т. к. $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$.

Квадратное уравнение

Корни приведённого квадратного уравнения могут быть найдены из соотношения:

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

тогда $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Из теоремы Виета для неприведённого квадратного уравнения следует, что корни квадратного трёхчлена могут быть найдены из соотношения:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad (a \neq 0),$$

тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ. ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Дробные рациональные выражения. Основное свойство рациональной дроби

Дробными рациональными выражениями (дробно-рациональными выражениями) называются выражения с переменными, которые могут содержать действия сложения, вычитания, умножения, возведения переменных в натуральную степень и деления на выражения с переменными. Если рассматривать выражения от одной переменной, то примером дробно-рационального выражения является отношение двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Пример. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 9xyz}$; $\dfrac{m - n^2}{m^3 + 3nx}$; $\dfrac{m}{n} + \dfrac{6x}{x^2 + 5y}$; $\dfrac{x^3}{x + 1}$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Рациональной дробью называется выражение $\frac{P}{Q}$, где P и Q — рациональные выражения, причём Q обязательно содержит переменные.

Пример. $\frac{1}{x^2+x+1}$; $\frac{a^2+bc}{ax^2+bx+c}$; $\frac{a^2+a+1}{m^2+3mn}$; $\frac{x+10}{x^3-x^2+2}$; $\frac{x^5+3x+2}{x^4+x^2+1}$.

Основное свойство дроби заключается в том, что числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен $\frac{P}{Q}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot R}$, если $R \neq 0$; $\frac{P}{Q}=\frac{P/R}{Q/R}$ — целое рациональное выражение.

Пример.

$$\frac{a+b}{a^2+1}=\frac{2(a+b)}{2(a^2+1)}. \quad \frac{\frac{1}{5}x^2+x+1}{\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{3}x}=\frac{15\left(\frac{1}{5}x^2+x+1\right)}{15\left(\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{3}x\right)}=\frac{3x^2+15x+15}{x^3+5x}.$$

$$\frac{7x^2+21x}{49x-7xy}=\frac{\frac{7x^2+21x}{7x}}{\frac{49x-7xy}{7x}}=\frac{x+3}{7-y},\ x \neq 0,\ y \neq 7.$$

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на (-1), то получим $\frac{P}{Q}=\frac{-P}{-Q}$. Отсюда значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак: $\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}=-\frac{P}{Q}$. Также можно записать: $\frac{P}{Q}=-\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{-Q}$.

Например: $\frac{2-3x^2}{-5+7x}=-\frac{3x^2-2}{-5+7x}=\frac{3x^2-2}{-7x+5}=-\frac{2-3x^2}{5-7x}$; $\frac{m^2-3n}{9n-m}=\frac{3n-m^2}{m-9n}=-\frac{m^2-3n}{m-9n}=$ $=-\frac{3n-m^2}{9n-m}$.

Сокращение рациональных дробей

Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель. Возможность подобного рода сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно попытаться разложить на множители числитель и знаменатель. Если числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби посредством сокращения невозможно.

Пример 1. Сократить дробь а) $\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}$; б) $\frac{3a-6b}{a^2-4b^2}$.

Решение. а) $\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)}{2(x+y)}=\frac{x-y}{2}$; б) $\frac{3a-6b}{a^2-4b^2}=\frac{3(a-2b)}{a^2-(2b)^2}=\frac{3(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{3}{a+2b}$.

Ответ: а) $\frac{x-y}{2}$; б) $\frac{3}{a+2b}$.

Приведение рациональных дробей к общему знаменателю

Общим знаменателем двух или нескольких рациональных дробей называется целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби. Для того чтобы несколько рациональных дробей привести к общему знаменателю, необходимо:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители, если это возможно;
2) составить общий знаменатель, включив в него в качестве сомножителей все различные множители, полученные в пункте 1); если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берётся с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;
3) определить дополнительные множители для каждой из дробей, для чего общий знаменатель разделить на знаменатель каждой дроби;
4) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

Пример. Привести к общему знаменателю дроби: $\dfrac{1}{9a(a^2-4b^2)}$; $\dfrac{5n}{36a^4-72a^3b}$; $\dfrac{3m}{20a^3+40a^2b}$.

Решение. $9a(a^2-4b^2)=9a(a-2b)(a+2b)$; $36a^4-72a^3b=36a^3(a-2b)$;
$20a^3+40a^2b=20a^2(a+2b)$.

Наименьшее общее кратное чисел 9, 36, 20 — это число 180. Отсюда общий знаменатель имеет вид $180a^3(a-2b)(a+2b)$. Дополнительные множители: $20a^2$, $5(a+2b)$, $9a(a-2b)$ — для первой, второй и третьей дробей соответственно. Окончательно получаем:

$$\frac{1}{9a(a^2-4b^2)}=\frac{1}{9a(a-2b)(a+2b)}=\frac{20a^2}{180a^3(a-2b)(a+2b)};\quad \frac{5n}{36a^4-72a^3b}=\frac{5n}{36a^3(a-2b)}=$$
$$=\frac{25n(a+2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)};\quad \frac{3m}{20a^3+40a^2b}=\frac{3m}{20a^2(a+2b)}=\frac{27am(a-2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)}.$$

Сложение и вычитание рациональных дробей

Сумма (разность) двух рациональных дробей с **одинаковыми знаменателями** тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме (разности) числителей исходных дробей:

$$\frac{P_1}{Q}\pm\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1\pm P_2}{Q}.$$

Пример.

$$\frac{2a+5}{a-1}+\frac{2-3a}{a-1}=\frac{2a+5+2-3a}{a-1}=\frac{7-a}{a-1},\ a\neq 1;\quad \frac{x^2}{x-y}-\frac{y^2}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=x+y,\ x\neq y.$$

При сложении (или вычитании) рациональных дробей с **разными знаменателями** нужно привести дроби к общему знаменателю и выполнить сложение (или вычитание) дробей с общим знаменателем:

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{P_1}{Q_1}=\frac{Pm\pm P_1n}{S},$$

где m — дополнительный множитель для первой дроби $\left(m=\dfrac{S}{Q_1}\right)$; n — дополнительный множитель для второй дроби $\left(n=\dfrac{S}{Q_1}\right)$; S — общий знаменатель.

Пример. Упростить выражение $\dfrac{1}{b}-\dfrac{3a}{b^2+3ab}-\dfrac{b}{b^2-9a^2}$.

Решение. $b^2+3ab=b(b+3a)$, $b^2-9a^2=b^2-(3a)^2=(b-3a)(b+3a)$.

$$\frac{1}{b}-\frac{3a}{b^2+3ab}-\frac{b}{b^2-9a^2}=\frac{1}{b}-\frac{3a}{b(b+3a)}-\frac{b}{(b-3a)(b+3a)}=\frac{(b+3a)(b-3a)-3a(b-3a)-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=$$
$$=\frac{b^2-9a^2-3ab+9a^2-b^2}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{-3ab}{b(b+3a)(b-3a)}=\frac{-3ab}{b(b^2-9a^2)}=\frac{3ab}{b(9a^2-b^2)}=\frac{3a}{9a^2-b^2}.$$

Умножение и деление рациональных дробей

Произведение двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2}.$$

Это правило распространяется на произведение любого конечного числа дробей.

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1}:\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot Q_2}{Q_1\cdot P_2}.$$

Если дробь умножается или делится не на дробь, а на многочлен $R(x)$, то указанные выше правила остаются в силе, но многочлен $R(x)$ необходимо представить в виде $R(x)=\frac{R(x)}{1}$.

На практике при умножении или делении рациональных дробей обычно предварительно разлагают на множители числители и знаменатели исходных дробей (если это возможно).

Пример 1. Упростить выражение а) $\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)}\cdot\frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3}=A.$

Решение. $\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)}=\frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2}$; $\frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3}=\frac{x^3(x-2)(x+2)}{(x+2)^3}=\frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2}$;

$$A=\frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2}=\frac{x}{3(x-2)}.$$

Ответ: $\frac{x}{3(x-2)}$.

Пример 2. Упростить выражение $\left(a+\frac{b-a}{1-ab}\right):\left(a+\frac{ab-a}{1-ab}\right)=A.$

Решение. $a+\frac{b-a}{1-ab}=\frac{a(1-ab)+b-a}{1-ab}=\frac{a-a^2b+b-a}{1-ab}=\frac{b-a^2b}{1-ab}=\frac{b(1-a^2)}{1-ab}=\frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab}$;

$$a+\frac{ab-a}{1-ab}=\frac{a(1-ab)+ab-a}{1-ab}=\frac{a-a^2b+ab-a}{1-ab}=\frac{ab-a^2b}{1-ab}=\frac{ab(1-a)}{1-ab};$$

$$A=\frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab}:\frac{ab(1-a)}{1-ab}=\frac{b(1-a)(1+a)(1-ab)}{(1-ab)ab(1-a)}=\frac{1+a}{a}.$$

Ответ: $\frac{1+a}{a}$.

Возведение рациональных дробей в степень

Степень рациональной дроби тождественно равна дроби, у которой числитель есть степень числителя, а знаменатель — степень знаменателя:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

Пример. $\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3=\left(\frac{x-3}{y}\right)^3=\frac{(x-3)^3}{y^3}$;

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств для формул сокращённого умножения:**

$x^2 - y^2 =$	$= x^2 - 2xy + y^2$
$(x + y)^2 =$	$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x - y)^2 =$	$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x + y + z)^2 =$	$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$(x + y)^3 =$	$= (x - y)(x + y)$
$(x - y)^3 =$	$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$
$x^3 - y^3 =$	$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$
$x^3 + y^3 =$	$= x^2 + 2xy + y^2$
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$	$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Ответы на тестовые задания к неделе 2

1 — 9. **2** — –24. **3** — –26. **4** — 49. **5** — 14.

НЕДЕЛЯ 3

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.1 Числа, корни и степени
- 1.1.2. Степень с натуральным показателем
- 1.1.4. Степень с целым показателем
- 1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства
- 1.1.7. Свойства степени с действительным показателем

1.4 Преобразования выражений
- 1.4.2. Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

***n*-й натуральной степенью действительного числа *a* называется действительное число *b*, получаемое в результате умножения числа *a* самого на себя *n* раз:**

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

n-ую степень числа a обозначают a^n и пишут: $b = a^n$.

Число a называется **основанием степени**, а число n — **показателем степени** ($n \geqslant 2$, $n \in \mathrm{Z}$).

$$0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^1 = a.$$

Например: $5^1 = 5$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например: $8^{-1} = \dfrac{1}{8}$; $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$; 0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a \geqslant 0$, $m \in \mathrm{N}$, $m \geqslant 2$, $n \in \mathrm{Z}$.

Например: $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25^1} = \sqrt{25} = 5$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$; $2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \geqslant 0$, n — натуральное число, $n \geqslant 2$; $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$.

Свойства степени с рациональным показателем

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \ (a^{p+q} = a^p \cdot a^q).$$

Пример 1. Представьте выражение в виде степени:

а) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = b^{\frac{7}{6}}$;

б) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^0 = 1$ при $x \neq 0$.

Пример 2. Вычислите: а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$.

Решение.

а) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5}+\frac{11}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3 = 8$;

б) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 5^1 = 5$.

Пример 3. Вычислите:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3^1 = 3;$$

$$\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,0625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0,0625^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{(0,5^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{0,5^{4 \cdot \frac{1}{4}}}{2^{4 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,5^1}{2^1} = 0,25.$$

Частное степеней с одинаковыми основаниями

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя:

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \left(a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q}\right) \text{ или } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

Пример 1. Упростите:

а) $a^{\frac{13}{15}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{15}} = a^{\frac{1}{5}}$;

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите значение выражения:

$$\frac{x^8 \cdot x^7}{x^{13}}$$

при $x = 3$.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{y^{-9} \cdot y^{-5}}{y^{-16}}$$

при $y = -3$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{(0,04)^7 \cdot 5^6}{(-125)^{-5} \cdot (-5)^3}.$$

4. Найдите значение выражения

$$12a^{-6} \cdot \left(-4a^{-3}y^7\right)^{-2}$$

при $a = 4728$, $y = -1$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Найдите значение выражения $\frac{t^7 \cdot t^9}{t^{12}}$ при $t = -5$.

6. Найдите значение выражения

$$\frac{18^6 \cdot 2^{-8}}{36^{-3} \cdot 9^9}.$$

7. Найдите значение выражения

$$\frac{5^{8,5}}{25^{3,25}}.$$

8. Найдите значение выражения

$$7^{\sqrt{5}+9} \cdot 7^{-6-\sqrt{5}}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\frac{8p^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{15}} \cdot p^{\frac{3}{5}}}.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

б) $y^{\frac{5}{9}} : y^{-\frac{1}{6}} = y^{\frac{5}{9}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = y^{\frac{5}{9}+\frac{1}{6}} = y^{\frac{13}{18}}$;

в) $\frac{z^{-0,3}}{z^{-0,8}} = z^{-0,3-(-0,8)} = z^{-0,3+0,8} = z^{0,5}$.

Пример 2. Вычислите:

$$\frac{\sqrt[7]{128} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[7]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{4^3}} = \frac{2^{\frac{7}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9}.$$

Степень степени

При возведении степени в степень нужно показатели степеней перемножить, а основание оставить прежним:

$$(a^p)^q = a^{pq} \quad (a^{pq} = a^q \cdot a^p).$$

Пример 1. Упростите:

а) $\left(x^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{7}{9}} = x^{\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9}} = x^{\frac{4}{9}}$; б) $(a^{-1,8})^{\frac{4}{9}} = a^{-1,8 \cdot \frac{4}{9}} = a^{-0,8}$.

Пример 2. Представьте выражение в виде степени с дробным показателем:

$$\sqrt[4]{b^3\sqrt{b}} = b^{\frac{3}{4}}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{8}} = b^{\frac{7}{8}}.$$

Пример 3. Вычислите:

а) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$;

б) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

Степень произведения и частного

p-я степень произведения равна произведению p-х степеней множителей:

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p \quad ((a^p \cdot b^p) = (ab)^p).$$

p-я степень дроби равна p-й степени числителя, делённой на p-ую степень знаменателя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad \left(\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p\right);$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

Пример 1. Упростите выражения:

а) $(a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (b^6)^{\frac{1}{3}} = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot b^{6 \cdot \frac{1}{3}} = a^1b^2 = ab^2$;

б) $\left(x^{-\frac{1}{4}}y^{-2}\right)^{-4} = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4}\cdot\left(y^{-2}\right)^{-4} = x^{-\frac{1}{4}\cdot(-4)}y^{-2\cdot(-4)} =$

$= x^1y^8 = xy^8;$

в) $\left(\dfrac{b^3}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{(b^3)^{\frac{1}{3}}}{(x^6)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{b^{3\cdot\frac{1}{3}}}{x^{6\cdot\frac{1}{3}}} = \dfrac{b^1}{x^2} = \dfrac{b}{x^2}.$

Пример 2. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{9^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}}{75^{-1}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{(3^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 75}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{3^{2\cdot\frac{3}{2}}\cdot 3\cdot 5^2}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} =$

$= \left(\dfrac{3^3\cdot 3\cdot 5^2}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\cdot 5^{2-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} =$

$= 3^{4\cdot\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 3^3\cdot 5 = 135;$

б) $\left(\dfrac{4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{25^{0,3}\cdot 5^{1,4}}{9^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\dfrac{(2^2)^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot(2^6)^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{(5^2)^{0,3}\cdot 5^{1,4}}{(3^2)^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\dfrac{2^{1,4}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 2^{-2}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{5^{0,6}\cdot 5^{1,4}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{2}{2^{-3}}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{5^2}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= (2^4)^{\frac{3}{4}}\cdot(5^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^3\cdot 5\cdot 3 = 120.$

Сравнение степеней с различными основаниями

Пусть r — рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0,$$
$$a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

Пример 1. Сравните: а) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$; б) $0,3^{\frac{1}{2}}$ и $0,5^{\frac{1}{2}}$; в) $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$.

Решение.

а) Так как $0 < 2 < 3$ и $\dfrac{1}{2} > 0$, то $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$;

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

10. Найдите значение выражения

$$45^{-8,3}\cdot 9^{9,3} : 5^{-7,3}.$$

____

11. Найдите значение выражения

$$\frac{\left(\sqrt{7b}\right)^4\cdot\sqrt[10]{b^6}}{(b^2)^{1,3}}$$

при $b \neq 0$.

____

12. Найдите значение выражения

$$3^{\frac{4}{7}}\cdot 81^{\frac{3}{28}}.$$

____

13. Найдите значение выражения $\dfrac{(16y)^{\frac{3}{2}}\cdot y^{3,6}}{y^{5,1}}$ при $y \neq 0$.

____

14. Найдите значение выражения

$$36^2\cdot 9^3 : 324.$$

____

15. Найдите значение выражения

$$9^6\cdot 13^8 : 117^6.$$

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

б) Так как $0 < 0{,}3 < 0{,}5$ и $\dfrac{1}{2} > 0$, то $0{,}3^{\frac{1}{2}} < 0{,}5^{\frac{1}{2}}$; в) $7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{1}{3}}$.

Пример 2. Сравните: а) $5^{\frac{2}{7}}$ и $3^{\frac{2}{7}}$; б) $(-8)^{-15}$ и $(-7)^{-15}$.

Решение.

а) Поскольку $5 > 3$, то $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$.

б) Так как $7 < 8$, то $7^{-15} > 8^{-15}$, тогда $-7^{-15} < -8^{-15}$ или $(-7)^{-15} < (-8)^{-15}$.

Пример 3. Среди всех чётных чисел, которые больше $\sqrt[4]{79}$, укажите наименьшее.

Решение.

Поскольку $2 < \sqrt[4]{79} < 3$, то чётными числами, которые больше $\sqrt[4]{79}$, являются 4, 6, 8, ..., а наименьшим числом является 4.

Ответ: 4.

Сравнение различных степеней с одинаковыми основаниями

Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1,$$
$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Пример 1. Сравните: а) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{\sqrt{2}}$; б) 2^{-3} и 2^{-4}; в) $2^{-\sqrt{2}}$ и $2^{-\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Поскольку $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, и $2 > 1$, то $2^{\sqrt{3}} > 2^{\sqrt{2}}$.

б) Поскольку $-3 > -4$, и $2 > 1$, то $2^{-3} > 2^{-4}$.

в) Поскольку $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$, и $2 > 1$, то $2^{-\sqrt{2}} > 2^{-\sqrt{3}}$.

Пример 2. Сравните: а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,5}$; в) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\pi}$.

Решение.

а) Поскольку $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ и $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, то $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

б) Поскольку $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ и $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, то $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,5}$.

в) Поскольку $-3 > -\pi$ и $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, то $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\pi}$.

Произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями

Пример 1. Вычислите: а) $\dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{36}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{4} \cdot 8^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2^{-1}}}$.

Решение.

а) $\dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{36}} = \dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{1,5}}{6^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{6^{\frac{1}{3}+1,5}}{6^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}} = 6^{\frac{1}{3}+1,5-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = 6^{1,5-\frac{1}{2}} = 6;$

НЕДЕЛЯ 3. Алгебра

б) $\dfrac{\sqrt[4]{4}\cdot 8^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2^{-1}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{4}}\cdot (2^3)^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{9}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = 2^3 = 8.$

Пример 2. Упростите: $\dfrac{\sqrt{xy^{\frac{4}{5}}}\cdot\sqrt[3]{x^{1,5}}}{x\sqrt[5]{y^{-3}}}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt{xy^{\frac{4}{5}}}\cdot\sqrt[3]{x^{1,5}}}{x\sqrt[5]{y^{-3}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}(x^{1,5})^{\frac{1}{3}}}{x\cdot y^{-\frac{3}{5}}} = \dfrac{x^{0,5}y^{0,4}x^{0,5}}{x\cdot y^{-0,6}} = x^{0,5+0,5-1}y^{0,4+0,6} = x^0y^1 = y.$

Другие комбинации свойств степеней

Пример 1. Найдите значение выражения: $\dfrac{49-d^{-1}}{7-d^{-0,5}}+6d^{0,5}$, если $d = 64$.

Решение. $\dfrac{49-d^{-1}}{7-d^{-0,5}}+6d^{0,5} = \dfrac{(7-d^{-0,5})(7+d^{-0,5})}{7-d^{-0,5}}+6d^{0,5} = 7+d^{-0,5}+6d^{0,5} =$

$= 7+64^{-\frac{1}{2}}+6\cdot 64^{\frac{1}{2}} = 7+\dfrac{1}{\sqrt{64}}+6\cdot\sqrt{64} = 7+\dfrac{1}{8}+48 = 55\dfrac{1}{8}.$

Пример 2. Вычислите: $4\cdot\sqrt{4^{1,5}}\cdot 0,25^{-0,25}-3\cdot\sqrt{2^{3,5}}\cdot 0,5^{-1,25}$.

Решение. $4\cdot\sqrt{4^{1,5}}\cdot 0,25^{-0,25}-3\cdot\sqrt{2^{3,5}}\cdot 0,5^{-1,25} = 4\cdot 4^{\frac{3}{4}}\cdot(4^{-1})^{-\frac{1}{4}}-3\cdot 2^{\frac{7}{4}}\cdot(2^{-1})^{-\frac{5}{4}} = 4^2 - 3\cdot 2^3 =$ $= 16-24 = -8.$

Тождественные преобразования степенных выражений

На примерах рассмотрим тождественные преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

Пример 1. Найдите значение выражения:

$$\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(2^2\cdot 2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}}{\left(2^{5\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{11}{12}}}{2^{\frac{11}{12}}} = 1.$$

Пример 2.

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1\cdot 5^1 = 10.$$

Пример 3. Преобразуйте выражение:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}.$$

Пример 4. Упростите выражение:

$$\frac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{(a^{0,4})^3-(b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=\frac{(a^{0,4}-b^{0,7})((a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2)}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=$$

$$=a^{0,4}-b^{0,7}.$$

Пример 5. Сократите дробь:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Пример 6. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\frac{16}{a-4}\right)^2=\left(\frac{(a^{0,5}+2)^2+(a^{0,5}-2)^2-16}{a-4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(a^{0,5})^2+2\cdot a^{0,5}\cdot 2+2^2+(a^{0,5})^2-2\cdot a^{0,5}\cdot 2+2^2-16}{a-4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a+4a^{0,5}+4+a-4a^{0,5}+4-16}{a-4}\right)^2=\left(\frac{2a-8}{a-4}\right)^2=\left(\frac{2(a-4)}{a-4}\right)^2=2^2=4.$$

НЕДЕЛЯ 3. Алгебра

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств для свойств степени:**

$a^{\frac{n}{m}} =$	$= a^{p-q}$
$a^p \cdot a^q =$	$= a^p \cdot b^p$
$\dfrac{a^p}{a^q} =$	$= \dfrac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q =$	$= \sqrt[m]{a^n}$
$(ab)^p =$	$= \left(\dfrac{b}{a}\right)^p$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p =$	$= a^{p+q}$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-p} =$	$= a^{pq}$

Ответы на тестовые задания к неделе 3

1 — 9. **2** — 9. **3** — 625. **4** — 0,75. **5** — 625. **6** — 16. **7** — 25. **8** — 343. **9** — 8. **10** — 1,8. **11** — 49. **12** — 3. **13** — 64. **14** — 2916. **15** — 169.

НЕДЕЛЯ 4

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.1 Числа, корни и степени

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства

1.4 Преобразования выражений

1.4.3. Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени

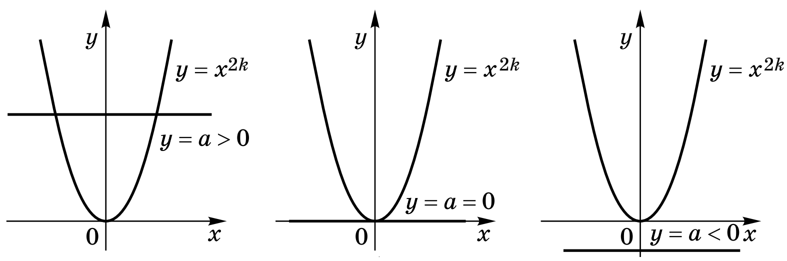
Понятие корня степени *n*

Корнем степени n из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a; a — действительное число.

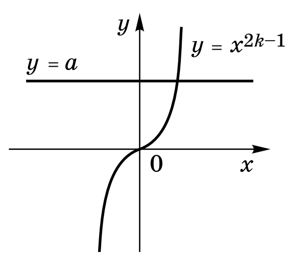
Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$; корень четвёртой степени из числа 16 равен 2 или -2, поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

Если n — чётное, то есть $n = 2k$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.



Если n — нечётное, то есть $n = 2k - 1$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют **показателем корня**, число a — **подкоренным выражением**.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идёт об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

Пример 1. Найдите значение: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень чётной степени существует только из неотрицательных чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x,\ a \ge 0,\ k \in N.$$

Арифметический корень нечётной степени существует из любого числа, поскольку

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a},\ \ k \in N.$$

Пример 2. Найдите значение: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0, \text{ где } k \in N. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in N$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geqslant b$; б) $a < b$.

Решение. $\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|$.

а) если $a \geqslant b$, то $a - b \geqslant 0$ и $|a-b| = a - b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a - b$;

б) если $a < b$, то $a - b < 0$ и $|a-b| = -(a-b) = b - a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b - a$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2.$$

____

2. Найдите $f(4+x) + f(4-x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{x}$.

____

3. Найдите значение выражения

$$\sqrt[5]{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[10]{3+2\sqrt{2}}.$$

____

4. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[12]{a}}$$

при $a = 144$.

____

5. Найдите значение выражения

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}.$$

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

6. Найдите значение выражения

$$\frac{14\cdot\sqrt[4]{\sqrt[30]{x}}-8\cdot\sqrt[12]{\sqrt[10]{x}}}{2\cdot\sqrt[24]{\sqrt[5]{x}}}$$

при $x > 0$.

---

7. Найдите $\frac{\varphi(4-x)}{\varphi(4+x)}$, если

$\varphi(x)=\sqrt[3]{x(8-x)}$ при $|x|\neq 4$.

---

8. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}-\frac{11-4\sqrt{7}}{3}.$$

---

9. Найдите значение выражения

$$\frac{3-8}{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4}-\sqrt[3]{3}.$$

---

10. Найдите значение выражения

$$\frac{16\sqrt[3]{\sqrt[32]{m}}+5\sqrt[48]{\sqrt{m}}}{7\cdot\sqrt[12]{\sqrt[8]{m}}}.$$

---

11. Найдите $\frac{q(3+x)}{q(3-x)}$, если

$q(x)=\sqrt[5]{x(6-x)}$.

Свойства корня степени *n*

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\text{если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \text{ то } \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\ \text{где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}=\sqrt[3]{0,027}\cdot\sqrt[3]{125}=0,3\cdot 5=1,5;$

б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}=\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{0,0081}=4\cdot 0,3=1,2.$

Пример 2. Вычислите: а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{1000}=10;$

б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{18^2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=6.$

Пример 3. Упростите выражение:

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2.$

Решение.

$(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2=$

$=(\sqrt{7+2\sqrt{10}})^2+2\sqrt{7+2\sqrt{10}}\times$

$\times\sqrt{7-2\sqrt{10}}+(\sqrt{7-2\sqrt{10}})^2=$

$=7+2\sqrt{10}+2\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}+7-2\sqrt{10}=$

$=14+2\sqrt{49-4\cdot 10}=14+2\cdot 3=20.$

Пример 4. Найдите значение выражения:

$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}.$

Решение.

$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}=$

$=\sqrt[3]{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{16-8}=\sqrt[3]{8}=2.$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, делённому на корень из делителя:

$$\text{если } a \geqslant 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений: а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Пример 2. Вычислите: а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in N,\ n \geqslant 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geqslant 0,\ n \in N,\ n \geqslant 2.$$

Пример 1. Упростите: а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.
Решение.
а) $(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$. б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите: а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}}$.
Решение.
а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0{,}3^{10}} = \sqrt[5]{(0{,}3^2)^5} = 0{,}3^2 = 0{,}09$.

Пример 3. Упростите: а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.
Решение.
а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = \left|a^5\right| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\text{если } a \geqslant 0, \text{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ m \geqslant 2,\ n \geqslant 2.$$

Пример 1. Упростите выражение: а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите: а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$; б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$; в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример. Найдите значение выражения: а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \dfrac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \dfrac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6} \cdot \sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{3^3}{2^2 \cdot 5} = \dfrac{27}{20} = 1\dfrac{7}{20}$.

Корень из произведения и частного корней

Пример. Упростите: $\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}}$.

Решение.

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4}\sqrt[12]{(ab^2)^3} \cdot \sqrt[12]{(a^5b)^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8a^3b^6a^{10}b^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$$

$$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21}b^8} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21}b^8)^2} : \sqrt[24]{(a^7b^3)^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{\frac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21}b^7}} = \sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21}b^7}} = \sqrt[24]{a^3b}.$$

Другие комбинации свойств корней степени *n*

Пример 1. Упростите: а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}$.

Пример 2. Найдите значение выражения: $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\dfrac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}+\frac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}=\frac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8}+\frac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8}=$$

$$=\frac{66}{17}=3\frac{15}{17}.$$

Пример 3. Найдите значение выражения: $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$.

Решение.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=$$

$$=\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{23^3-(8\sqrt{7})^2}=\sqrt[4]{529-448}=\sqrt[4]{81}=3.$$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств для свойств корня:**

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=$	$=\sqrt[n]{a^k}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=$	$=\sqrt[n]{ab}$
$(\sqrt[n]{a})^k=$	$=\sqrt[mn]{a}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=$	$=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$	$=\sqrt[n]{a^m}$

Ответы на тестовые задания к неделе 4

1 — 8. **2** — 0. **3** — –1. **4** — $2\sqrt{3}$. **5** — 1. **6** — 3. **7** — 1. **8** — 0. **9** — –2. **10** — 3. **11** — 1.

НЕДЕЛЯ 5

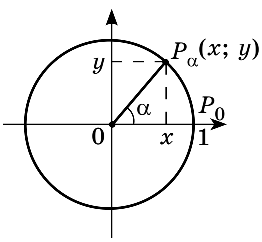
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.2. Основы тригонометрии
- 1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла
- 1.2.2. Радианная мера угла
- 1.2.3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа
- 1.2.4. Основные тригонометрические тождества

1.4. Преобразования выражений
- 1.4.4. Преобразования тригонометрических выражений

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС

Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента



Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

Синусом числа α называется ордината точки P_α, образованной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

Обозначается: $\sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α.

Косинусом числа α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α радиан.

Обозначается: $\cos\alpha$, т. е. $\cos\alpha = x$ — абсцисса точки P_α.

Синус и косинус определены для любого числа α.

$$|\sin\alpha| \leqslant 1,\ |\cos\alpha| \leqslant 1.$$

Тангенсом числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

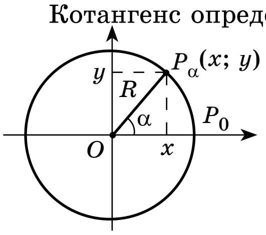
Тангенс определен для всех α, кроме тех значений, при которых $\cos\alpha = 0$, т. е.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Котангенсом числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Котангенс определён для всех α, кроме тех, при которых $\sin\alpha = 0$, т. е. $\alpha = \pi n$, $n \in Z$.



Для окружности произвольного радиуса *R* определения тригонометрических функций выглядят следующим образом:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\quad \cos\alpha = \frac{x}{R};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Если $n \in Z$, то справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;\ \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha.$$

Если $n \in Z$, то справедливы равенства:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{2}+2\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=$

$=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot 1+1+2\cos\dfrac{\pi}{6}=-1\cdot 1+1+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};$

б) $\sin 405^\circ + \operatorname{ctg} 570^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) +$

$+ \operatorname{ctg}(540^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}.$

Пример 2. Определите знак выражения:

а) $\cos 155^\circ \cdot \sin 255^\circ > 0$, т. к. 155° — угол II четверти, то $\cos 155^\circ < 0$; 255° — угол III четверти, тогда $\sin 255^\circ < 0$;

б) $\operatorname{tg} 127^\circ \cdot \operatorname{ctg} 201^\circ < 0$, т. к. 127° — угол II четверти, то $\operatorname{tg} 127^\circ < 0$; 201° — угол III четверти, тогда $\operatorname{ctg} 201^\circ > 0$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основное тригонометрическое тождество

Основное тригонометрическое тождество:

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Следствия:

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha \neq \pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите синус наименьшего угла египетского треугольника (стороны 3, 4, 5).

2. В прямоугольном треугольнике *ABC* $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$ дм, $BC = 9$ дм. Вычислите $\cos\angle B$.

3. В равнобедренном треугольнике *PQR* основание $RP = 14$ см, $\cos\angle R = 0{,}56$. Найдите длину боковой стороны.

4. В прямоугольном треугольнике *PDM* гипотенуза $DM = 26$ см, $PM = \sqrt{507}$ см. Найдите $\cos\angle D$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Высота BK, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC, равна 5 см. Найдите боковую сторону треугольника если $\operatorname{ctg}\angle A = \sqrt{3}$.

6. Найдите значение выражения

$$-6\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}.$$

7. Найдите значение выражения

$$24\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

8. Найдите значение выражения

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ при } \alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ при } \alpha \ne \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$?

Решение. Так как рассматриваются функции синус и косинус одного и того же аргумента, то должно выполняться основное тригонометрическое тождество:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, но $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ne 1.$

Поэтому равенства $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ одновременно справедливы быть не могут (т. к. не выполняется основное тригонометрическое тождество).

б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Решение. Проверим выполнение основного тригонометрического тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит, равенства, данные в условии, одновременно справедливы.

Пример 2. Найдите значения тригонометрических функций числа α, зная, что $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Решение. Так как по условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$ то α — принадлежит II четверти. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -\sqrt{1-0{,}36} =$$

$$= -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$.

П р и м е р 3. Упростите:

а) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;

б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Решение.

а) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \cdot 1 + \cos^2\alpha =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha} =$

$= \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha.$

П р и м е р 4. Докажите тождество:

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть тождества. Если в результате получим правую часть, то тождество доказано.

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\dfrac{\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha(1 - \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Тождество доказано.

П р и м е р 5. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Найдите:

$$\sin\alpha\cos\alpha.$$

Решение. Возведём обе части равенства в квадрат:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2$;

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = a^2$;

$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2$; $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{a^2 - 1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a^2 - 1}{2}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

9. В треугольнике KPM $\angle P = 90°$, $MK = 12$ см, $PK = \sqrt{63}$ см. Найдите $\cos\angle M$.

____

10. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\cos A = \dfrac{5}{13}$, высота $BH = 24$. Найдите периметр треугольника.

____

11. Найдите значение выражения

$$\frac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{8\cos\alpha + 4\sin\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Произведение тангенса и котангенса одного и того же аргумента

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пример 1. Могут ли быть справедливы равенства:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\ \alpha = 2$?

Решение. Поскольку $\operatorname{tg}\ \alpha \cdot \operatorname{ctg}\ \alpha = 1$, то:

а) равенства справедливы, так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$;

б) равенства справедливыми не могут быть, так как $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \neq 1$.

Пример 2. Упростите: $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 5° \cdot .... \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 89°$.

Решение.

Так как $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, то

$\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 5° \cdot .... \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 89° =$

$= \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot ... \cdot \operatorname{tg} 43° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 47° \cdot ... \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 89° =$

$= \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot ... \cdot \operatorname{tg} 43° \cdot 1 \cdot \operatorname{ctg} 43° \cdot ... \cdot \operatorname{ctg} 3° \cdot \operatorname{ctg} 1° =$

$= (\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{ctg} 1°)(\operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{ctg} 3°) \cdot ... \cdot (\operatorname{tg} 43° \times \operatorname{ctg} 43°) = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1.$

Пример 3. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$. Найдите: $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, то $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 2^2$ или $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 4$.

Учитывая что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$, из последнего равенства

$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 4 - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$

Пример 4. Упростите: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

Решение.

$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = (\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) - (\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) =$

$= \operatorname{tg}^2\alpha + 2 \cdot 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 2 \cdot 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = 2 + 2 = 4.$

Зависимость между тангенсом и косинусом одного и того же аргумента

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Вычислите значения тригонометрических функций числа α, если $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha \in$ I четверти, поэтому $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$.

Из формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ следует: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 4^2$; $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 17$;

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{17}; \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}.$$

Учитывая что $0 < \cos\alpha < 1$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Учитывая что $0 < \sin\alpha < 1$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$;

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}25$.

Пример 2. Упростите: $(1+\operatorname{tg}^2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Решение.

$$(1+\operatorname{tg}^2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Зависимость между котангенсом и синусом одного и того же аргумента

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ при } \alpha \ne \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Пример 1. Вычислите значения тригонометрических функций, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, α — угол IV четверти.

Решение. Так как α — угол IV четверти, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$; $-1 < \sin\alpha < 0$; $0 < \cos\alpha < 1$.

Известно, что $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Отсюда $1+9 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 10$;

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{10}; \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Но $-1 < \sin\alpha < 0$, поэтому $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$;

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

Пример 2. Упростите выражения: $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$;

Решение. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 5\alpha = \frac{1}{\sin^2 5\alpha}$.

Другие комбинации соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Пример 1. Упростите: а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1$; в) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

Решение.

а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1 = (\cos^2\alpha)^2 - (\sin^2\alpha)^2 + 1 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 1 =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

в) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} : \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$.

Пример 2. Упростите выражение $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и найдите его значение, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение.

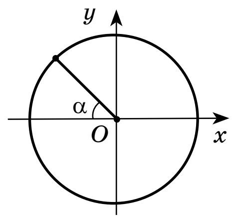
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$ Если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, то $\frac{2}{\sin\alpha} = 2 : \frac{1}{2} = 4$.

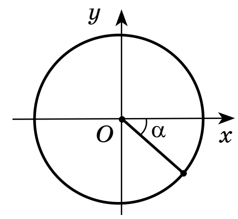
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

- **Нарисуйте на одной из координатных осей отрезок, соответствующий:**

а) $\sin\alpha$



б) $\cos\alpha$



- **Запишите формулы для тангенса и котангенса:**

$\operatorname{tg}\alpha =$

$\operatorname{ctg}\alpha =$

- **Запишите основное тригонометрическое тождество:**

- **Соедините соответствующие части равенств для тригонометрических соотношений:**

$\sin^2\alpha =$	$= 1$
$\cos^2\alpha =$	$= \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha =$	$= 1 - \sin^2\alpha$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha =$	$= \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha =$	$= 1 - \cos^2\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$= \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Ответы на тестовые задания к неделе 5

1 — 0,6. **2** — 0,6. **3** — 12,5. **4** — 0,5. **5** — 10. **6** — 9. **7** — –12. **8** — –5. **9** — 0,75. **10** — 72. **11** — 0,55.

НЕДЕЛЯ 6

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.2. Основы тригонометрии
- 1.2.5. Формулы приведения
- 1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов
- 1.2.7. Синус и косинус двойного угла

1.4. Преобразования выражений
- 1.4.4. Преобразования тригонометрических выражений

Формулы сложения

Синус суммы и разности

Синус суммы двух аргументов равен сумме произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Синус разности двух аргументов равен разности произведений синуса первого аргумента на косинус второго и косинуса первого аргумента на синус второго:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Пример 1. Вычислите: а) $\sin 15°$; б) $\sin 75°$.

Решение.

а) $\sin 15° = \sin (45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

б) $\sin 75° = \sin (45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Найдите значения выражений:

а) $\sin 56° \cos 34° + \cos 56° \sin 34°$; б) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

Решение.

а) $\sin 56° \cos 34° + \cos 56° \sin 34° = \sin (56° + 34°) = \sin 90° = 1$;

б) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{6\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Пример 3. Упростите: $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

Решение. $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Косинус суммы и разности

Косинус суммы двух аргументов равен разности произведений косинусов этих аргументов и синусов этих аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Косинус разности двух аргументов равен сумме произведений косинусов этих аргументов и синусов этих аргументов:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Пример 1. Вычислите: а) cos 105°; б) cos 15°.

Решение.

а) $\cos 105° = \cos(60° + 45°) =$
$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$

б) $\cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \times$
$\times \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$

Пример 2. Упростите выражение:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

Решение. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = 2\cos\alpha \cos\beta.$

Пример 3. Вычислите:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15} - \sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right)}{\sin(0,3\pi + 0,2\pi)} = \frac{\cos\frac{5\pi}{15}}{\sin 0,5\pi} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Тангенс суммы и разности

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} \quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} \quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} \quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha + \beta) \neq \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha - \beta) \neq \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Вычислите:

а) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{20}\right) = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{20} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите значение выражения

$$-12\sqrt{3}\operatorname{ctg}(-480°).$$

____

2. Найдите значение выражения

$$\frac{3\cos 37°}{\sin 53°}.$$

____

3. Найдите значение выражения

$$3\cos(5\pi + \alpha) - \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right),$$

если $\cos\alpha = 0,63$.

____

4. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{-25\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)}{2}.$$

____

5. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -0,3$.

____

6. Вычислите: $\frac{\operatorname{tg}58° - \operatorname{tg}13°}{1 + \operatorname{tg}58° \cdot \operatorname{tg}13°}$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

7. Найдите значение выражения

$$\frac{18\sin 36^\circ}{\sin 18^\circ \cos 18^\circ}.$$

8. Найдите значение выражения

$$\frac{3(\cos^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ)}{10\sin^2 31^\circ - 5}.$$

9. Найдите значение выражения

$$-16\cdot\sqrt{3}\sin(-120^\circ).$$

10. Найдите $39\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

11. Найдите значение выражения

$$\frac{6\sin 137^\circ\cdot\cos 137^\circ}{\sin 274^\circ}.$$

12. Найдите $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

б) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}=\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}\right)=\operatorname{tg}\frac{4\pi}{16}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Пример 2. Докажите тождество:

$\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha\ \operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha.$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}6\alpha=\frac{\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha}\Rightarrow\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=$$
$$=\operatorname{tg}6\alpha(1-\operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha).$$

Тогда из данного равенства имеем:

$$\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}6\alpha\ \operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha=$$
$$=\operatorname{tg}6\alpha(1-\operatorname{tg}4\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha).$$

Пример 3. Вычислите $\operatorname{tg}15^\circ$.

Решение.

$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=$$
$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

Следствия из формул сложения

Синус двойного аргумента

Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Пример 1. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$; $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

Решение. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Найдём $\cos\alpha$.

Так как $180^\circ<\alpha<270^\circ$, то α — угол III четверти, т. е. $-1<\cos\alpha<0$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=$$
$$=-\sqrt{0{,}64}=-0{,}8.$$

Итак, $\sin 2\alpha=2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8)=0{,}96.$

Ответ: 0,96.

Пример 2. Вычислите: а) $\sin 15° \cos 15°$; б) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

Решение.

а) $\sin 15° \cos 15° = \frac{1}{2}(2\sin 15° \cos 15°) = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

б) $(\cos 75° - \sin 75°)^2 = \cos^2 75° - 2\cos 75° \sin 75° + \sin^2 75° = (\cos^2 75° + \sin^2 75°) -$
$- 2\cos 75° \sin 75° = 1 - \sin 150° = 1 - \sin(180° - 30°) = 1 - \sin 30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Косинус двойного аргумента

Косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Пример 1. Докажите тождество: $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1$.

Доказательство.

Преобразуем левую часть равенства:

$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2 -$
$- (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta +$
$+ \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta =$
$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 1$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислите: а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $\cos^4 15° - \sin^4 15°$.

Решение.

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^4 15° - \sin^4 15° = (\cos^2 15°)^2 - (\sin^2 15°)^2 = (\cos^2 15° - \sin^2 15°)(\cos^2 15° + \sin^2 15°) =$
$= \cos 30° \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Упростите: а) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; б) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$.

Решение.

а) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$
$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

б) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} =$
$= \frac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Тангенс двойного аргумента

Тангенс двойного аргумента равен частному удвоенного тангенса аргумента и разности единицы и квадрата тангенса данного аргумента:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Пример 1. Вычислите: а) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; б) $\frac{6\operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$.

Решение.

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}=\operatorname{tg}\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1;$

б) $\dfrac{6\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}=3\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}=3\cdot\operatorname{tg}150^\circ=3\operatorname{tg}(180^\circ-30^\circ)=3\cdot(-\operatorname{tg}30^\circ)=-3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$

Пример 2. Вычислите $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Решение. $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}}=1:\dfrac{3}{4}=\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3}.$

Пример 3. Упростите: $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha-(1-\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Формулы приведения

Тригонометрические функции аргументов $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ могут быть выражены через функции аргумента α с помощью формул, которые называют **формулами приведения**.

Два угла называются **дополнительными**, если их сумма равна 90° $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, для них справедливы равенства:

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\qquad\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\qquad\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Чтобы облегчить запоминание формул приведения для преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)\qquad\cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)\qquad\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ n\in Z,$$

удобно пользоваться такими правилами:

а) перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

б) функция меняется на «кофункцию», если n — нечётное; функция не меняется, если n — чётное (кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс).

Примеры к этому правилу приведены в таблице.

Функция	Аргументы			
	$\varphi = \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\varphi = \pi \pm \alpha$	$\varphi = \dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\varphi = 2\pi - \alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Пример 1. Найдите значения: а) $\sin\dfrac{8\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}$.

Решение.

а) $\sin\dfrac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 2. Упростите: $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1.$$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Пример 1. Вычислите значение $\sin\dfrac{\pi}{12}$ без помощи таблиц.

Решение. По формуле $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$ имеем: $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1 - \cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Так как $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \sin\dfrac{\pi}{12} < 1$. Получим: $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

Упростим ответ:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\left|\sqrt{3} - 1\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Пример 2. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = 0{,}8$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ по условию, то α принадлежит I четверти, и значит, $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1$, $0 < \cos\frac{\alpha}{2} < 1$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1}$;

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = \sqrt{\frac{1{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}9};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \frac{1}{3}.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\quad \alpha,\ \beta \neq \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha,\ \beta \neq \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 40° + \cos 10° = 2\cos\frac{40° + 10°}{2}\cos\frac{40° - 10°}{2} = 2\cos 25°\cos 15°$;

б) $\cos 3\alpha - \cos 7\alpha = 2\sin\frac{3\alpha + 7\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha - 3\alpha}{2} = 2\sin 5\alpha\sin 2\alpha$.

Пример 2. Найдите значение выражения при данном значении переменной:

$$\frac{1}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha},\quad \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

Решение. Упростим данное выражение:

$$\frac{1}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{1}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{2\sin 4\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha\sin 4\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\sin 4\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha}.$$

Так как $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$, имеем: $\dfrac{\sin 3 \cdot \dfrac{\pi}{12}}{\sin 2 \cdot \dfrac{\pi}{12} \sin 4 \cdot \dfrac{\pi}{12}} = \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{4}}{\sin \dfrac{\pi}{6} \sin \dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств для тригонометрических соотношений:**

$\sin(\alpha + \beta) =$	$= \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) =$	$= 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) =$	$= \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
$\cos(\alpha - \beta) =$	$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
$\sin 2\alpha =$	$= 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos 2\alpha =$	$= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{tg} 2\alpha =$	$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
$\sin\alpha + \sin\beta =$	$= 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta =$	$= \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Ответы на тестовые задания к неделе 6

1 — –12. **2** — 3. **3** — –2,52. **4** — 0,25. **5** — 0,3. **6** — 1. **7** — 36. **8** — –0,6. **9** — 24. **10** — 36. **11** — 3. **12** — 0,8.

НЕДЕЛЯ 7

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

1.3. Логарифмы
- 1.3.1. Логарифм числа
- 1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени
- 1.3.3. Десятичный и натуральный логарифмы, число *e*

1.4. Преобразования выражений
- 1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования

ЛОГАРИФМ

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = k \Leftrightarrow a^k = b.$$

Например, $\log_2 8 = 3$, т. к. $2^3 = 8$; $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, т. к. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\lg 100 = 2$, т. к. $10^2 = 100$.

Логарифм единицы по любому основанию равен нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

$$\log_a a = 1.$$

Понятие логарифма

Пример 1. Найдите число x: а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_x 27 = 3$.

Решение.

а) Поскольку $\log_5 x = 2$, то $x = 5^2$; $x = 25$.

б) Поскольку $\log_x 27 = 3$, то $x^3 = 27$, тогда $x = \sqrt[3]{27}$; $x = 3$.

Пример 2. Вычислите: а) $4 \log_2 16 - 5 \log_3 27$; б) $0,5\log_2 64 + 0,1\log_5 \frac{1}{25}$.

Решение.

а) $4 \log_2 16 - 5 \log_3 27 = 4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 16 - 15 = 1$.

б) $0,5\log_2 64 + 0,1\log_5 \frac{1}{25} = 0,5 \cdot 6 + 0,1 \cdot (-2) = 3 - 0,2 = 2,8$.

Свойства логарифмов

Логарифм произведения и сумма логарифмов

Логарифм произведения двух положительных чисел по данному основанию равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,\ x > 0,\ y > 0.$$

Сумма логарифмов положительных чисел по одному основанию равна логарифму произведения этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy,\ x > 0,\ y > 0.$$

Пример 1. Вычислите: а) $\lg 20 + \lg 5$; б) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$; в) $\log_6 4 + \log_6 3 + \log_6 18$.

Решение.

а) $\lg 20 + \lg 5 = \lg (20 \cdot 5) = \lg 100 = 2$;

б) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16 = \log_{12} (9 \cdot 16) = \log_{12} 144 = 2$;

в) $\log_6 4 + \log_6 3 + \log_6 18 = \log_6 (4 \cdot 3 \cdot 18) =$
$= \log_6 216 = 3$.

Пример 2. Найдите значение выражения: $\log_4 (64c)$, если $\log_4 c = -3{,}5$.

Решение. $\log_4 (64c) = \log_4 64 + \log_4 c = 3 - 3{,}5 = -0{,}5$.

Логарифм частного и разность логарифмов

Логарифм частного двух положительных чисел по данному основанию равен разности логарифмов этих чисел по тому же основанию:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\ x > 0,\ y > 0.$$

Разность логарифмов двух чисел по данному основанию равна логарифму частного по тому же основанию:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},\ x > 0,\ y > 0.$$

Пример 1. Вычислите: $\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{27}$.

Решение.

$$\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{27} = \log_3 \left(8 : \frac{8}{27}\right) = \log_3 27 = 3.$$

Пример 2. Вычислите: $\dfrac{\log_2 25 - \log_2 5}{\log_2 20 - \log_2 4}$.

Решение. $\dfrac{\log_2 25 - \log_2 5}{\log_2 20 - \log_2 4} = \dfrac{\log_2 \frac{25}{5}}{\log_2 \frac{20}{4}} = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 5} = 1$.

Логарифм степени и произведение числа и логарифма

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени и логарифма этого числа:

$$\log_a x^n = n \log_a x,$$

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x. \quad x > 0.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вычислите $\log_{\sqrt[5]{19}} 19$.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{4 + \log_2 3}{\log_2 48}.$$

3. Найдите значение выражения

$$e^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} e} + \frac{1}{3}\ln 8}$$

4. Найдите значение выражения

$$5^{3 + \log_5 2}.$$

5. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0{,}2.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Вычислите $7^{\log_7 4^3}$.

7. Найдите значение выражения

$9^{2+\log_9 1}$.

8. Вычислите $16^{\log_2 3}$.

9. Найдите значение выражения

$\log_{\frac{4}{7}} 5 \cdot \log_5 1{,}75$.

10. Найдите значение выражения $9^{\log_3 5}$.

11. Найдите значение выражения

$4^{\log_{16} 81}$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Пример 1. Вычислите:

а) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4$;

б) $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$;

в) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 2\log_2 2 = 2$;

г) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Пример 2. Упростите:

а) $\log_2 8^x - \log_4 16^x = x \log_2 8 - x \log_4 16 = 3x - 2x = x$;

б) $\log_6 36^x - x = x \log_6 36 - x = 2x - x = x$.

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};\ a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0;\ b \neq 1;\ x > 0.$$

Следствия:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};\quad \log_a b = \log_{a^k} b^k.$$

Пример 1. Вычислите: а) $\frac{\log_3 4}{\log_3 2}$; б) $\frac{\log_{15} 81}{\log_{15} 3}$.

Решение.

а) $\frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2$;

б) $\frac{\log_{15} 81}{\log_{15} 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$.

Пример 2. Вычислите $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$.

Решение. Используем формулу перехода к новому основанию, например, основанию 10:

$$\log_9 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5}{\lg 3^2} \cdot \frac{\lg 3^3}{\lg 5^2} = \frac{\lg 5 \cdot 3\lg 3}{2\lg 3 \cdot 2\lg 5} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Логарифм произведения и частного степеней, сумма и разность логарифмов с одинаковыми основаниями

Нахождение логарифмов чисел или выражений называется логарифмированием.

1. Логарифм произведения:

$$x = 5abc,\quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0;$$
$$\log_a x = \log_a 5 + \log_a a + \log_a b + \log_a c = \log_a 5 + 1 + \log_a b + \log_a c.$$

2. Логарифм произведения и частного:

$$x = \frac{abc}{5},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0;$$

$$\log_a x = \log_a a + \log_a b + \log_a c - \log_a 5 = 1 + \log_a b + \log_a c - \log_a 5.$$

3. Логарифм произведения, частного, степени:

$$x = \frac{3m^8k^5}{2n^3},\ m > 0,\ k > 0,\ n > 0,\ a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\log_a x = \log_a 3 + 8\log_a m + 5\log_a k - \log_a 2 - 3\log_a n.$$

Нахождение чисел или выражений по данным логарифмам называется **потенцированием.**

Пример 1. $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$. Найти x.

Решение. $\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$; $\lg x = \lg \dfrac{5 \cdot 2^3}{3^2}$; $x = \dfrac{5 \cdot 2^3}{3^2} = \dfrac{40}{9} = 4\dfrac{4}{9}$.

Пример 2. $\log_a x = \dfrac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$. Найти x.

Решение. $\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$; $\log_a x = \log_a \dfrac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$; $x = \dfrac{\sqrt{b}c^5}{p}$.

Сумма и разность логарифмов с различными основаниями

Пример 1. Вычислите: а) $\log_2 5 + \log_4 \dfrac{8}{25}$; б) $\log_3 4 - \log_{\sqrt{3}} \dfrac{2}{3}$.

Решение.

а) $\log_2 5 + \log_4 \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \log_{2^2} \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{8}{25} = \log_2 5 + \log_2 \sqrt{\dfrac{8}{25}} =$

$= \log_2 5 + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{25} = \log_2 5 + \log_2 2^{\frac{3}{2}} - \log_2 5 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5;$

б) $\log_3 4 - \log_{\sqrt{3}} \dfrac{2}{3} = \log_3 4 - 2\log_3 \dfrac{2}{3} = \log_3 4 - \log_3 \dfrac{4}{9} = \log_3\left(4 : \dfrac{4}{9}\right) = \log_3 9 = 2.$

Основное логарифмическое тождество

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,\ \text{где}\ a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0.$$

Например: $5^{\log_5 3} = 3$; $10^{\lg 7} = 7$; $e^{\ln 5} = 5$.

Пример 1. Вычислите: $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Решение.

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 4} = (5^{\log_5 \sqrt{3}})^4 \cdot (5^{\log_5 4})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{3})^4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot 2 = 18.$$

Пример 2. Вычислите: $25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21}$.

Решение.

$$25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21} = 25^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log_5 9} - 121^{\frac{1}{2}\log_{11} 21} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 9^{\frac{1}{2}}} - \left(121^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 21} =$$

$$= 5^{\log_5 3} - 11^{\log_{11} 21} = 3 - 21 = -18.$$

Другие комбинации свойств логарифмов

При вычислении значения одного логарифмического выражения по некоторым другим известным логарифмическим выражениям обычно используют разложение всех входящих в данные выражения множителей на простые множители.

Пример. Известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найти $\log_{30} 8$.

Решение. По формуле перехода к новому основанию представим $\log_{30} 8$ в виде:

$\log_{30} 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg 30}$.

Разложим числа 8 и 30 на простые множители, получим: $\lg 8 = \lg 2^3 = 3 \lg 2$; $\lg 30 = \lg (3 \cdot 10) = \lg 3 + \lg 10 = \lg 3 + 1$. Представим $\lg 2$ в виде: $\lg 2 = \lg \dfrac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - \lg 5$.

Получим: $\log_{30} 8 = \dfrac{3(1-\lg 5)}{\lg 3 + 1} = \dfrac{3(1-a)}{\lg 3 + 1} = \dfrac{3(1-a)}{b+1}$.

Ответ: $\dfrac{3(1-a)}{b+1}$.

Десятичные и натуральные логарифмы

Десятичный логарифм — это логарифм по основанию 10:

$$\log_{10} b = \lg b.$$

Натуральный логарифм — это логарифм по основанию *e* (*e* — иррациональное число, приближенное значение которого: $e \approx 2{,}7$):

$$\log_e b = \ln b.$$

Пример. Вычислите: а) $\dfrac{\lg 27 + \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$; б) $\lg 30 + \lg 20 - \lg 6$; в) $0{,}01^{\lg 3 - 1}$.

Решение.

а) $\dfrac{\lg 27 + \lg 3}{\lg 15 - \lg 5} = \dfrac{\lg(27 \cdot 3)}{\lg(15 : 5)} = \dfrac{\lg 81}{\lg 3} = \log_3 81 = 4$; б) $\lg 30 + \lg 20 - \lg 6 = \lg \dfrac{30 \cdot 20}{6} = \lg 100 = 2$;

в) $0{,}01^{\lg 3 - 1} = (10^{-2})^{\lg 3 - 1} = (10^{-2})^{\lg 3} \cdot (10^{-2})^{-1} = (10^{\lg 3})^{-2} \cdot 10^2 = 3^{-2} \cdot 100 = \dfrac{100}{9} = 11\dfrac{1}{9}$.

Тождественные преобразования логарифмических выражений

Пример 1. Упростите выражение:

$$36^{\frac{1}{2} - \log_6 5} + 2^{-\log_2 10} = 36^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{36^{\log_6 5}} + \frac{1}{2^{\log_2 10}} = \sqrt{36} \cdot \frac{1}{(6^{\log_6 5})^2} + \frac{1}{10} = 6 \cdot \frac{1}{25} + 0{,}1 = 0{,}24 + 0{,}1 = 0{,}34.$$

Пример 2. Найдите значение выражения: $(2 \log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2 \log_{12} 6 - \log_{12} 3)$.

Решение. $(2 \log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2 \log_{12} 6 - \log_{12} 3) = (\log_{12} 4 + \log_{12} 3)(\log_{12} 36 - \log_{12} 3) = \log_{12} (4 \cdot 3) \cdot \log_{12} (36 : 3) = \log_{12} 12 \cdot \log_{12} 12 = 1 \cdot 1 = 1$.

Пример 3. На сколько сумма чисел $\log_2 5$ и $\log_2 20$ больше числа $\log_2 (5 + 20)$?

Решение.

$(\log_2 5 + \log_2 20) - \log_2 (5 + 20) = \log_2 (5 \cdot 20) - \log_2 25 = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 (100 : 25) = \log_2 4 = 2$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

♦ **Запишите формулы свойств логарифмов:**

$\log_a x + \log_a y =$

$\log_a x - \log_a y =$

♦ **Соедините соответствующие части равенств:**

$\log_a x^n =$	$= \dfrac{1}{k} \log_a x$
$\log_{a^k} x =$	$= b$
$\log_a x =$	$= \dfrac{1}{\log_b a}$
$a^{\log_a b} =$	$= n \log_a x$
$\log_a b =$	$= \log_{a^k} b^k$
$\log_a b =$	$= \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ответы на тестовые задания к неделе 7

1 — 5. **2** — 1. **3** — 8. **4** — 250. **5** — 0. **6** — 64. **7** — 81. **8** — 81. **9** — –1. **10** — 25. **11** — 9.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «АЛГЕБРА»

1. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a}+\sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a}-\sqrt{10-a}=1$.

2. Упростите выражение $\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{3}{1+x^3}+\dfrac{6}{1+x^6}+\dfrac{12}{1+x^{12}}+\dfrac{24}{1+x^{24}}+\dfrac{48}{1+x^{48}}$.

3. На сколько процентов снизится цена товара, если сначала её снизили на 10%, а потом ещё на 20%?

4. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом ещё на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена первого товара меньше первоначальной цены второго товара.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

6. Найдите, при каких значениях a и b многочлен $x^4 + 6x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится без остатка на многочлен $x^2 + 4x + 3$.

7. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}+3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

8. Найдите $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 8 = b$.

1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 8

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.1. Уравнения
- 2.1.1. Квадратные уравнения
- 2.1.2. Рациональные уравнения
- 2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнением называется равенство с переменной. В общем виде уравнение записывают: $f(x) = g(x)$. Под этой записью понимают математическую запись задачи нахождения значений аргумента, при котором значение двух данных функций равны.

Корнем (или решением) уравнения называется значение переменной, которое превращает это уравнение в верное равенство.

Решить уравнение — означает найти все его корни или доказать, что их нет.

Например, $x = 2$ — корень уравнения $\sqrt{x+2} = x$, поскольку при $x = 2$ получим верное равенство: $\sqrt{4} = 2$, т. е. $2 = 2$.

Областью допустимых значений (ОДЗ) или областью определения уравнения называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения.

Для уравнения $\sqrt{x-3} = x$ ОДЗ: $x - 3 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 3$, поскольку область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется из условия $x - 3 \geqslant 0$, а область определения функции $f(x) = x$ — множество всех действительных чисел.

Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого.

Если из правильности первого равенства вытекает правильность каждого последующего, то получим уравнения-следствия.

При использовании уравнений-следствий *не происходит потери корней начального уравнения, но возможно появление посторонних корней*. Поэтому при использовании уравнений-следствий **проверка полученных корней** подстановкой в начальное уравнение является составной частью решения.

Например: $\sqrt{x+2} = x$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$(\sqrt{x+2})^2 = x^2$; $x + 2 = x^2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

Проверка: $x = 2$ — корень, т. к. $\sqrt{2+2} = 2$, т. е. $2 = 2$; $x = -1$ — посторонний корень, т. к. $\sqrt{-1+2} \neq -1$; $1 \neq -1$.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

Два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни. То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго является корнем первого.

Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение

1. Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $x + 4 = 2x + 9 \Leftrightarrow 2x + 9 = x + 4$.
2. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $2x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = -7 - 3$.
3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному. Например, уравнение $\frac{x+1}{4} = x$ равносильно уравнению $x + 1 = 4x$ (умножив обе части уравнения $\frac{x+1}{4} = x$ на число 4, получим $x + 1 = 4x$).
4. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному. Например: $x + 2 = 5x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 2 + 7 = 5x + 7$; $5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x + 2 - 2 = 0 - 2$.
5. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них любую функцию, то получится уравнение, равносильное данному при условии что области определения полученного и данного уравнений совпадают. Например:
$x = 2 \Leftrightarrow x + x^2 = 2 + x^2$; $x^3 + 5x = 8 + 5x \Leftrightarrow x^3 = 8$.

Пример. Решите уравнение: $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-1}$.

Решение. Используем **равносильные преобразования** для решения этого уравнения. Для этого необходимо учесть ОДЗ, поэтому зафиксируем её ограничения в начале решения. Заметим, что в уравнении *ограничения ОДЗ можно только зафиксировать, но не решить*, а в конце — *проверить*, выполняются ли эти ограничения для найденных корней.

ОДЗ: $x - 2 \neq 0$; $x - 1 \neq 0$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Решите квадратное уравнение
$$3x^2 - 20x - 7 = 0.$$
Если корней несколько, то в ответ запишите бóльший. Если уравнение не имеет действительных корней, то в ответ запишите «0».

2. Катер по течению реки проходит 300 км на 2 часа быстрее, чем 378 км против течения реки. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч. Ответ запишите в км/ч.

3. Расстояние от пункта *A* до пункта *B* длиной 480 км легковой автомобиль проезжает на 2 ч быстрее, чем грузовой. Найдите скорость грузового автомобиля, если она на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля. Ответ запишите в км/ч.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Расстояние $AB = 10$ км. Через 30 мин после него из пункта A в пункт B выехал велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист, обогнав пешехода и доехав до пункта B, вернулся снова в пункт A в тот же момент, когда пешеход пришёл в пункт B. Найдите скорость пешехода. Ответ запишите в км/ч.

____

5. Решите уравнение
$$\frac{(12-x)\cdot(x-2)}{4-x^2}=0\,.$$

____

6. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из пункта A в пункт B и из пункта B в пункт A. После встречи одному приходится быть в пути ещё 2 ч, а другому — $\frac{9}{8}$ ч. Определите скорости автомобилей, если расстояние между пунктами A и B равно 210 км. В ответе запишите меньшее число, выразив его в км/ч.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

На этом ОДЗ уравнение равносильно уравнениям:
$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=0.$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель дроби не равен нулю.

Второе условие уже учтено в ОДЗ, поэтому

$2x+1=0;\ x=-\frac{1}{2}.$

Учтём ОДЗ: при $x=-\frac{1}{2}$: $x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0;$

$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Разложение на множители

Применение этого метода основано на том, что уравнение $f(x)\cdot\varphi(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{array}\right.$ в области определения уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=0$.

Иррациональные уравнения

Пример. Решите уравнения:

а) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; б) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$.

Решение.

а) $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$; ОДЗ: $2x-1\geqslant 0$, $x\geqslant 0{,}5$.

$$(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0;\ \left[\begin{array}{l} x^2-1=0; \\ 2x-1=0; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 1; \\ x=0{,}5. \end{array}\right.$$

$x=-1$ — не входит в ОДЗ. Следовательно, $x=0{,}5$; $x=1$.

Ответ: 0,5; 1.

б) ОДЗ: $x^2-x-2\geqslant 0$; $(x-2)(x+1)\geqslant 0$;

$x\in(-\infty;\ -1]\cup[2;\ +\infty)$.

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0.$$
$$\left[\begin{array}{l} x-1=0; \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=2,\ x=-1. \end{array}\right.$$

$x=1$ — не входит в ОДЗ. Следовательно, $x=2$, $x=-1$.

Ответ: 2; –1.

Причины появления посторонних корней и потери корней при решении уравнений

Причина: получение уравнений-следствий за счет следующих преобразований	При каких преобразованиях могут повляться	Пример неправильного (или неполного) решения
1. Переход к уравнению, у которого ОДЗ шире, чем у заданного уравнения. Необходимо выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение или учитывать ОДЗ заданного уравнения	а) приведение подобных членов	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Перенесём из правой части в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ и приведём подобные: $x^2-6x=0$; $x_1=0$; $x_2=6$ (получим посторонний корень $x=0$, который не входит в ОДЗ: $x-2\geqslant 0$). *Правильный ответ*: 6
	б) приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю (при отбрасывании знаменателя)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3)+7(x+2)=4$; $x=-2$ (не учли ОДЗ: $x\neq-2$, $x\neq-3$). *Правильный ответ*: корней нет
	в) возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат или любую чётную степень	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. $2x+1=x$; $x=-1$ (не учтено ОДЗ $x\geqslant 0$; $2x+1\geqslant 0$). *Правильный ответ*: корней нет
2. Выполнение преобразований, в которых есть неявное умножение на нуль	Умножение обеих частей на выражение с переменной	$\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$. Умножим обе части на $(x-1)$: $\frac{x^2}{x-1}\cdot(x-1)=\frac{1}{x-1}(x-1)$; $x^2=1$; $x=\pm1$. ($x=1$ не является корнем). *Правильный ответ*: $x=-1$
3. Применение к обеим частям уравнения функции, которая не монотонна	Возведение обеих частей уравнения в чётную степень или добавление к обеим частям тригонометрических функций	$\sqrt{x+1}=x-1$. Возведём обе части в квадрат: $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-1)^2$; $x+1=x^2-2x+1$; $x^2-3x=0$; $x(x-3)=0$; $x_1=3$; $x_2=0$ (проверка показывает, что $x=0$ — посторонний корень). *Правильный ответ*: 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Окончание таблицы

Причина: получение уравнений-следствий за счет следующих преобразований	**При каких преобразованиях могут появляться**	**Пример неправильного (или неполного) решения**
4. Явное или неявное сужение ОДЗ заданного уравнения, в частности выполнение преобразований, в которых происходит неявное деление на нуль	а) деление обеих частей уравнения на выражение с переменной $\downarrow$ *Вывод*: те значения, на которые сузили ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно $\uparrow$ б) сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, у которого ОДЗ у́же, чем у заданного уравнения	$x^2 = x$ Поделим обе части уравнения на x, получим: $x = 1$ (потеря корня $x = 0$, т. к. фактически получили $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, уравнение, где ОДЗ: $x \neq 0$, т. е. сузили ОДЗ исходного уравнения). *Ответ*: 0; 1
5. Применение формул, сужающих область определения уравнений, в частности возможно неточное применение формул	Если применяются формулы, сужающие область определения, полученные значения рассматриваем отдельно и следим за строгостью применения формул	$\lg x^2 = 4$ По свойству логарифма: $2 \lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$ (произошла потеря корня $x = -100$ из-за того, что формулу $\lg x^2 = 2 \lg \lvert x \rvert$ применили без модуля). *Ответ*: ± 100

Замена переменной

Это довольно распространённый метод. С его помощью повторяющееся выражение заменяют одной переменной, решают полученное уравнение относительно этой новой переменной и возвращаются к начальной переменной, делая обратную замену.

Иррациональные уравнения

Например: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 9$.

Решение. Пусть $x^2 - 6x + 9 = t$, тогда $x^2 - 6x + 18 = t + 9$, $t \geqslant 0$. Получаем уравнение: $\sqrt{t} + \sqrt{t + 9} = 9$. Решаем его способом изоляции квадратного корня:

$$\sqrt{t+9} = 9 - \sqrt{t}; \left(\sqrt{t+9}\right)^2 = \left(9 - \sqrt{t}\right)^2; \; t + 9 = 81 - 18\sqrt{t} + t; 18\sqrt{t} = 72; \sqrt{t} = 4; \left(\sqrt{t}\right)^2 = 4^2; t = 16.$$

Тогда $x^2 - 6x + 9 = 16$; $x^2 - 6x - 7 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 7$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x = -1$; $x = 7$.

Рассмотрим другое уравнение, которое можно решить методом замены переменной: $\sqrt{2x^2-8x+12} = x^2-4x-6$.

Приведём уравнение к виду: $\sqrt{2x^2-8x+12} = \dfrac{1}{2}(2x^2-8x+12)-12$.

Пусть $t = \sqrt{2x^2-8x+12}$, $t > 0$. Получим $t = \dfrac{1}{2}t^2-12$; $t^2-2t-24=0$; $t_1=6$; $t_2=-4$ — не подходит, т. к. $t > 0$.

Сделаем обратную замену: $\sqrt{2x^2-8x+12} = 6$.

$2x^2-8x+12=36$; $x^2-4x+6=18$; $x^2-4x-12=0$; $x_1=6$; $x_2=-2$.

Ответ: $x_1=-2$; $x_2=6$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$

В этом случае обе части возводят в степень $k = \text{НОК}(n,\ m)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n.

Например: $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}$. ОДЗ: $x-1 \geqslant 0$; $x \geqslant 1$.

Возведём обе части в степень НОК(2; 3) = 6. $(x-1)^3=(x+3)^2$; $x^3-4x^2-3x-10=0$.

Подбором находим: $x_1=5$ (5 — делитель числа 10). Тогда $x^3-4x^2-3x-10 = (x-5)(x^2+x+2)=0$.

$$\left[\begin{aligned} &x-5=0;\\ &x^2+x+2=0;\end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &x=5;\\ &\text{решений нет.}\end{aligned}\right.$$

Ответ: 5.

Использование свойств функций

Если нужно решить уравнение $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство $f(x)=g(x)$ возможно в случае $\begin{cases} f(x)=a;\\ g(x)=a.\end{cases}$

Если нужно решить уравнение $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке x, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Иррациональные уравнения

Пример 1. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-5x+6} = 4x-x^2-4$.

Решение. $\sqrt{x^2-5x+6} = 4x-x^2-4$; $\sqrt{x^2-5x+6} = -(x^2-4x+4)$; $\sqrt{x^2-5x+6} = -(x-2)^2$;

так как $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6} \geq 0$, а $-(x-2)^2 \leqslant 0$, то получаем: $\begin{cases} \sqrt{x^2-5x+6}=0;\\ -(x-2)^2=0;\end{cases}$ $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$.

Решение. ОДЗ: $x-7 \geqslant 0$, $x \geqslant 7$. $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$; $\sqrt{x-7}=3-\sqrt[3]{x}$.

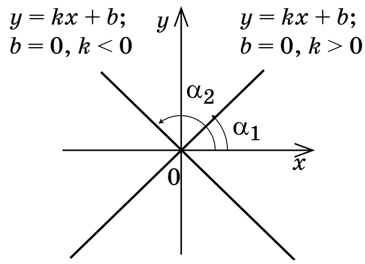
Если $x \geqslant 7$, то $f(x)=\sqrt{x-7}$ — возрастающая, а $g(x)=3-\sqrt[3]{x}$ — убывающая, следовательно, уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$ имеет единственный корень, $x=8$.

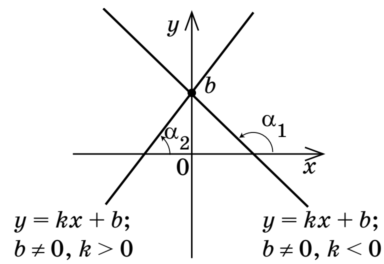
Ответ: 8.

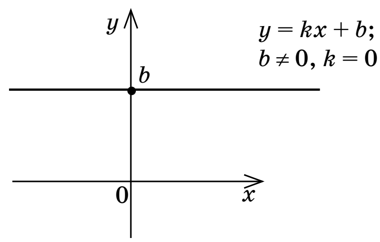
Уравнения и связанные с ними функции

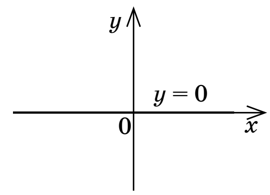
Линейные уравнения

Линейная функция $y = kx + b$, $k \in R$, $b \in R$. График функции $y = kx + b$ (прямая)





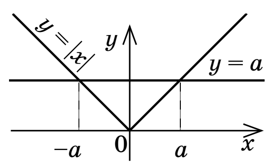




Простейшие уравнения, связанные с функцией $y = |x|$

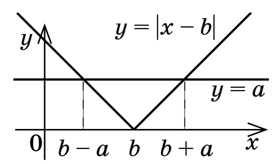
Функция $y = |x|$

Уравнение $|x| = a$



$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$\varnothing$	$x = 0$	$x = a$, $x = -a$

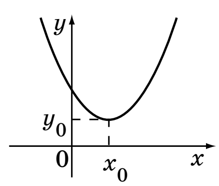
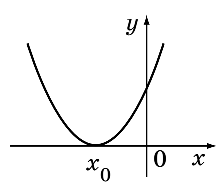
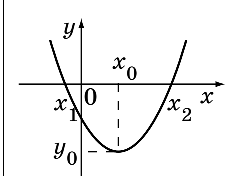
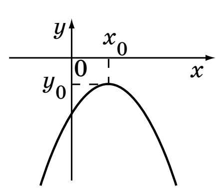
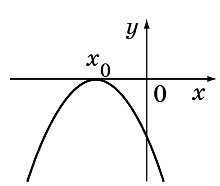
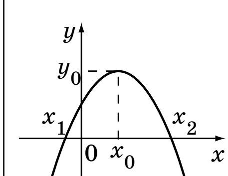
Уравнение $|x - b| = a$



$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$\varnothing$	$x = b$	$x = b - a$, $x = b + a$

Квадратные уравнения

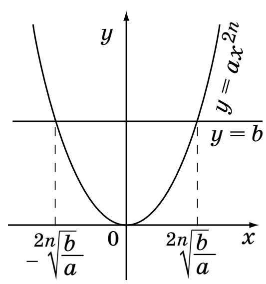
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. График функции $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (парабола)

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. $D=b^2-4ac$ — дискриминант	$D<0$	$D=0$	$D>0$
	$\varnothing$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
Уравнение $ax^2+c=0$, $a\neq 0$, $b=0$	$ac>0$	$ac<0$	$ac=0$
	$\varnothing$	$x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$	$x=0$
Уравнение $x^2+px+q=0$	$x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$		
Уравнение $ax^2+bx=0$, $c=0$, $a\neq 0$	$x_1=0$; $x_2=-\dfrac{b}{a}$		
Уравнение $ax^2+2kx+c=0$	$x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$		

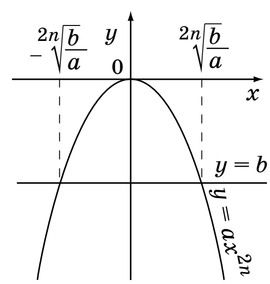
Простейшие уравнения, связанные с функцией $y=ax^{2n}$

Функция $y=ax^{2n}$, $n\in N$.
Уравнение $ax^{2n}=b$



$ax^{2n}=b$, $a>0$

$b<0$	$b=0$	$b>0$
$\varnothing$	$x=0$	$x=\pm\sqrt[2n]{\dfrac{b}{a}}$

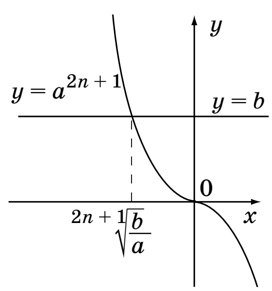


$ax^{2n}=b$, $a<0$

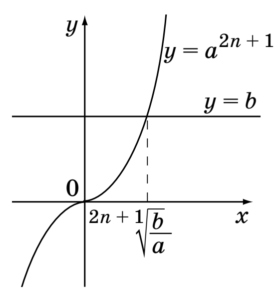
$b<0$	$b=0$	$b>0$
$x=\pm\sqrt[2n]{\dfrac{b}{a}}$	$x=0$	$\varnothing$

Простейшие уравнения, связанные с функцией $y=ax^{2n+1}$

Функция $y=ax^{2n+1}$, $n\in N$.
Уравнение $ax^{2n+1}=b$



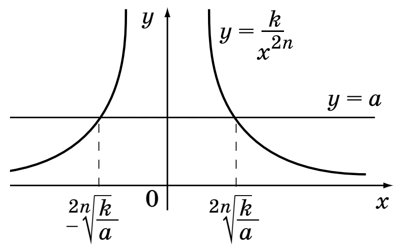
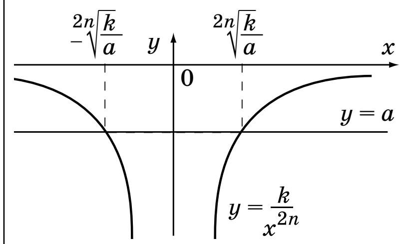
$a<0$

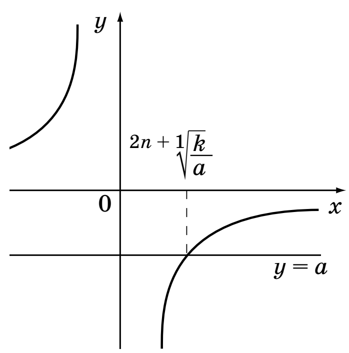


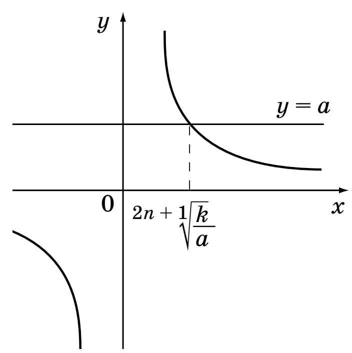
$a>0$

$$x=\sqrt[2n+1]{\dfrac{b}{a}}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

<table>
<tr><td colspan="5">Простейшие уравнения, связанные с функцией $y = \frac{k}{x^{2n}}$</td></tr>
<tr><td>Функция $y = \frac{k}{x^{2n}}$, $n \in N$.
Уравнение $\frac{k}{x^{2n}} = a$, $n \in N$</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>$a>0$</td><td>$a=0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td>$k<0$</td><td>$\varnothing$</td><td>$\varnothing$</td><td>$x = \pm\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}$</td></tr>
<tr><td>$k>0$</td><td>$x = \pm\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}$</td><td>$\varnothing$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Простейшие уравнения и неравенства, связанные с функцией $y = \frac{k}{x^{2n+1}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Функция $y = \frac{k}{x^{2n+1}}$, $n \in N$.

Уравнение $\frac{k}{x^{2n+1}} = a$,
$n \in N$</td><td colspan="2">

$k>0$</td><td colspan="2">

$k<0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a=0$
$\varnothing$</td><td colspan="2">$a \neq 0$
$x = \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}$</td></tr>
</table>

Использование графиков

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ очень проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций. Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

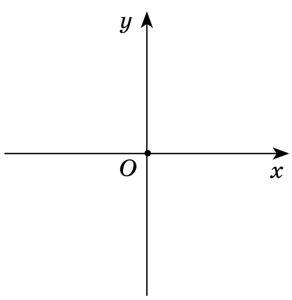
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Запишите преобразования уравнения $5x + 3 = 2x - 1$, которые приведут к равносильному ему уравнению.**

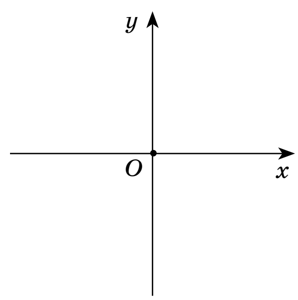
1. Если в уравнении поменять местами левую и правую части	
2. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный	
3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число	
4. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них одно и то же число	
5. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть из них любую функцию, при условии что области определения полученного и данного уравнений совпадают	

♦ **Схематически изобразите графическое решение уравнений:**

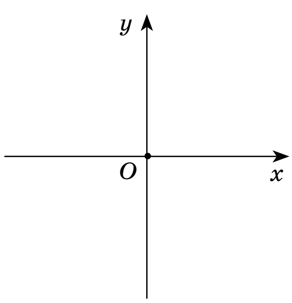
а) $5x + 3 = 2$



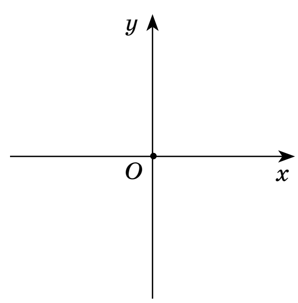
в) $2x^3 = 5$



б) $2x^2 + x + 1 = 3$



г) $\dfrac{3}{x^4} = 2x + 1$



Ответы на тестовые задания к неделе 8

1 — 7. **2** — 57. **3** — 60. **4** — 4. **5** — 12. **6** — 60.

НЕДЕЛЯ 9

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.1. Уравнения

2.1.3. Иррациональные уравнения

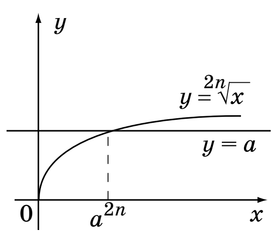
2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Иррациональные уравнения

Простейшие иррациональные уравнения

Уравнение $\sqrt[2n]{x} = a$, $n \in N$.

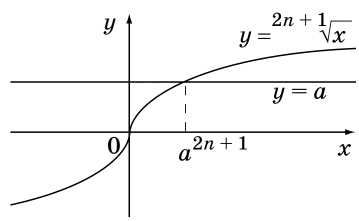
Функция $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in N$.



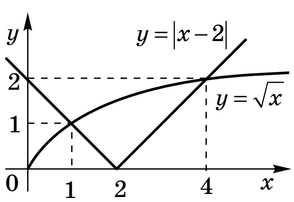
$a<0$	$a \geqslant 0$
$\varnothing$	$x=a^{2n}$

Уравнение $\sqrt[2n+1]{x} = a$, $n \in N$.

Функция $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in N$.



$x=a^{2n+1}$



П р и м е р. Решите уравнение: $\sqrt{x} = |x-2|$.

Решение. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x-2|$ изображены на рисунке. Они пересекаются в точках A (1; 1) и B (4; 2). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Решение иррациональных уравнений

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называется иррациональным.

При решении таких уравнений чаще всего их сводят к рациональным.

При **решении иррациональных уравнений необходимо помнить,** что:

1. В уравнении корни чётной степени — арифметические, поэтому значение корня неотрицательное, подкоренное выражение — неотрицательное, например: уравнение $\sqrt{x-3} = -2$ корней не имеет, потому что $\sqrt{x-3} \geq 0$ всегда.

2. Все корни нечётной степени определены для любого подкоренного выражения, значение корня имеет тот же знак, что и подкоренное выражение:

$$\sqrt[3]{x+7} = 3; \quad (\sqrt[3]{x+7})^3 = 3^3; \quad x + 7 = 27; \quad x = 20.$$

3. Решение иррациональных уравнений надо начинать с нахождения **области определения** уравнения, если в него входят корни чётной степени.

Область определения (или область допустимых значений) — это множество всех действительных чисел x, при которых одновременно имеют смысл выражения, входящие в уравнение.

Корни уравнения, не удовлетворяющие исходному уравнению, называются **посторонними**.

4. Чтобы исключить полученные в результате неравносильных преобразований посторонние корни, необходимо сделать проверку решений.

5. К появлению посторонних корней могут привести такие преобразования, как возведение в чётную степень обеих частей, которые равны по абсолютным значениям, но могут отличаться знаком.

Следует заметить, что формальное использование формул типа

$$\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b} \quad \text{или} \quad \sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$$

может привести к сужению области определения уравнения в целом и потере корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений

Возведение обеих частей уравнения в степень

Пример. Решите уравнение: $\sqrt{9-x} = x+3$.

Решение. Поскольку в уравнении слева — корень чётной степени, то $9-x \geqslant 0$ и $x \leqslant 9$. Кроме того, правая часть уравнения должна быть неотрицательной, поскольку слева имеем арифметический корень.

$x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$. Тогда область значений переменной: $x \in [-3;\ 9]$.

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$9-x = (x+3)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + x - 9 = 0;$

$x(x+7) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = -7$. Но $x_2 \notin [-3;\ 9]$.

Ответ: $x = 0$.

«Изоляция» квадратного корня

Этот метод используется в тех случаях, когда он упрощает решение уравнения.

Пример. Решите уравнение: $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+2 \geqslant 0; \\ 3-x \geqslant 0; \end{cases}$ $x \in [-2;\ 3]$.

Изолируем один квадратный корень:

$\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x+1.$$

____

2. Найдите корень уравнения

$$\sqrt{14-5x} = 3.$$

____

3. Решите уравнение

$$\sqrt{9-x} = \sqrt{x-3}.$$

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Возведём обе части уравнения в квадрат: $x + 2 = 9 - 6\sqrt{3 - x} + 3 - x \Rightarrow 5 - x = 3\sqrt{3 - x}$.
Еще раз возведём в квадрат обе части уравнения:

$25 - 10x + x^2 = 9(3 - x) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2.$

Проверка показывает, что оба числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x = -1$; $x = 2$.

«Изоляция» кубического корня

Пример. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$.

Решение. Областью определения этого уравнения являются все действительные числа. Изолируем один из корней и возведём в куб обе части уравнения:

$$x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x - 2 = 2x - 3;$$

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 0;\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0; \\ x - 2 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \end{array}\right.$$

или $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 0$; $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{x-2}$; $x - 1 = -(x - 2)$; $x_3 = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $x = 1$; $x = 2$; $x = 1{,}5$.

Решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$

В этом случае обе части возводят в степень $k = \text{НОК}(n, m)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n.

Пример. Решите уравнение: $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}$.
Решение. ОДЗ: $x - 1 \geqslant 0$; $x \geqslant 1$. Возведём обе части в степень НОК(2; 3) = 6.

$(x - 1)^3 = (x + 3)^2$; $x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = 0$. Подбором находим: $x_1 = 5$.

Тогда $x^3 - 4x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x^2 + x + 2) = 0$. Уравнение $x^2 + x + 2 = 0$ корней не имеет.

Проверка показывает, что $x = 5$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 5$.

Использование нескольких приёмов при решении уравнений

Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{f(x)} = h(x)$ или $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$

При решении такого уравнения обе части возводят в куб по формуле:

$$(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})^3 = a \pm b \pm 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$$

и выражение, стоящее в скобках в правой части формулы, заменяют на правую часть исходного уравнения.

Замечание. Новое уравнение, получившееся при этом преобразовании, не равносильно данному, а является уравнением-следствием. Поэтому рациональное уравнение, получившееся при этом, может иметь посторонние корни, которые отсеиваются проверкой.

Пример. Решите уравнение: $\sqrt[3]{3x+24} - \sqrt[3]{2x+6} = \sqrt[3]{x}$.
Решение. Возведём обе части уравнения в куб:

$$3x + 24 - 2x - 6 - 3\sqrt[3]{(3x+24)(2x+6)}(\sqrt[3]{3x+24)} - \sqrt[3]{2x+6}) = x.$$

Заменим выражение $(\sqrt[3]{(3x+24)} - \sqrt[3]{2x+6})$ на $\sqrt[3]{x}$, учитывая условие.

Получим: $\sqrt[3]{(3x+24)(2x+6)x} = 6$ или $x^3 + 11x^2 + 24x - 36 = 0$. Находим корни уравнения: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -6$. Проверка показывает, что $x = -6$ — посторонний корень.

Ответ: $x = 1$.

Сведение иррационального уравнения к системе рациональных уравнений

Пример. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x+7} = a$, $\sqrt[3]{28-x} = b$, тогда $a + b = 5$. Найдём $a^3 + b^3 = x + 7 + 28 - x = 35$.

Получим систему: $\begin{cases} a^3 + b^3 = 35; \\ a + b = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35; \\ a + b = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 6; \\ a + b = 5. \end{cases}$

Имеем две системы: $\begin{cases} a = 2; \\ b = 3; \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 3; \\ b = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x + 7 = 2^3; \\ 28 - x = 3^3; \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 7 = 3^3; \\ 28 - x = 2^3; \end{cases}$ $x = 1$; $x = 20$.

Ответ: $x = 1$; $x = 20$.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, чаще всего применяют следующие методы:

а) раскрытие модуля по определению;

б) возведение обеих частей уравнения в квадрат;

в) метод интервалов (промежутков).

Отметим свойства модуля, которые нередко используются на практике:

$$|x| \geqslant 0,\ |x| \geqslant x,\ |xy| = |x| \cdot |y|,$$

$$|x|^2 = x^2,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$$

$$|-x| = |x|,\ |-f(x)| = |f(x)|.$$

Прежде чем начать решать уравнение с модулем, заметим, что уравнение $|f(x)| = a$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$, если $a \geqslant 0$. Если же $a < 0$, то уравнение $f|(x)| = a$ решений не имеет.

Пример. Решите уравнение: $|2x - 1| = |x - 1|$.

Решение. Исходное уравнение с двумя модулями можно решать методом интервалов, который рассмотрен ниже, однако для данного уравнения быстрее всего приводит к цели способ возведения обеих частей уравнения в квадрат, с учетом того что $|f(x)|^2 = (f(x))^2$.

Имеем: $|2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow |2x - 1|^2 = |x - 1|^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\,(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: 0; $\dfrac{2}{3}$.

Метод интервалов (промежутков) при решении уравнений с модулями

Этот метод заключается в следующем:

1) приравниваются к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;
2) полученные значения наносим на числовую прямую, которая при этом разбивается на интервалы (промежутки), в каждом из которых — свой знак подмодульного выражения;
3) решаются полученные уравнения в каждом из интервалов.

На практике метод интервалов обычно применяется, когда уравнение содержит более одного модуля.

Рассмотрим применение метода интервалов на конкретном примере.

Пример. Решите уравнение: $|x+2|+|x-4|=5x-20$.

Решение. $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. Наносим на числовую прямую точки $x=-2$ и $x=4$. Эти точки разбивают прямую на три интервала (промежутка), в каждом из которых свой знак подмодульного выражения. Обозначим эти интервалы I, II, III, где I: $x<-2$; II: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; III: $x>4$.

Для интервала I имеем:

$|x+2|=-(x+2)=-x-2$; $|x-4|=-(x-4)=-x+4$.

Отсюда получаем решение уравнения в I интервале:

$$-x-2-x+4=5x-20 \Leftrightarrow -2+4+20=x+x+5x \Leftrightarrow 22=7x \Leftrightarrow x=\frac{22}{7}.$$

Однако значение $x=\frac{22}{7}$ не принадлежит I интервалу, где $x<-2$, иначе говоря, $\frac{22}{7}\notin(-\infty;-2)$, отсюда исходное уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$ — в I интервале решений не имеет.

Для II интервала $|x+2|=x+2$, $|x-4|=-(x-4)=-x+4$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$$x+2+(-x+4)=5x-20 \Rightarrow 5x=2+4+20=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{5}.$$

Однако $\frac{26}{5}$ не входит в интервал $-2 \leqslant x \leqslant 4$, значит, во II интервале исходное уравнение решений не имеет.

Для III интервала $|x+2|=x+2$; $|x-4|=x-4$, тогда исходное уравнение имеет вид:

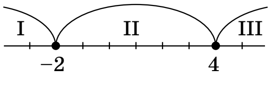
$$x+2+x-4=5x-20 \Leftrightarrow 2-4+20=-x-x+5x \Leftrightarrow 18=3x \Leftrightarrow x=6.$$

Так как 6 входит в интервал $x>4$, то $x=6$ является решением исходного уравнения.

Ответ: 6.

Замечание. Решение примера можно записать в следующей форме, применяя понятие совокупности смешанных систем, т. е. систем, содержащих уравнения и неравенства:

$|x+2|+|x-4|=5x-20$.



Имеем три интервала — I: $x<-2$; II: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; III: $x>4$. Отсюда, в зависимости от того, в каком интервале мы ищем решение, исходное уравнение равносильно совокупности следующих смешанных систем:

$$\begin{cases} x<-2; \\ -(x+2)-(x-4)=5x-20; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4; \\ x+2-(x-4)=5x-20; \end{cases} \quad \begin{cases} x>4; \\ x+2+x-4=5x-20; \end{cases}$$

или $\begin{cases} x<-2; \\ x=\frac{22}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4; \\ x=\frac{26}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x>4; \\ x=6. \end{cases}$

Первая и вторая системы решений не имеют (это означает, что в I и во II интервалах решений нет), т. к. $\frac{22}{7} \notin (-\infty; -2), \frac{26}{5} \notin [-2; 4]$, а третья система имеет решение $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример. Решите уравнение: $\log_3 |2x - 1| = 2$.

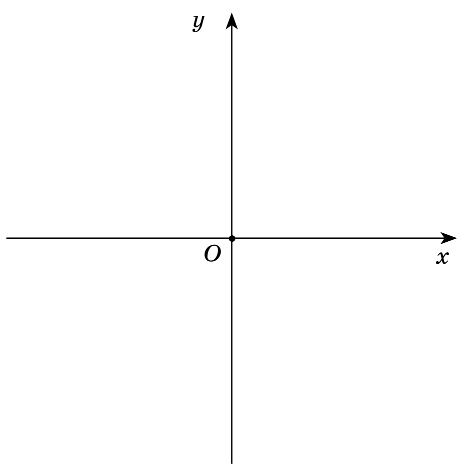
Решение. $\log_3 |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=9 \\ 2x-1=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Ответ: 5; –4.

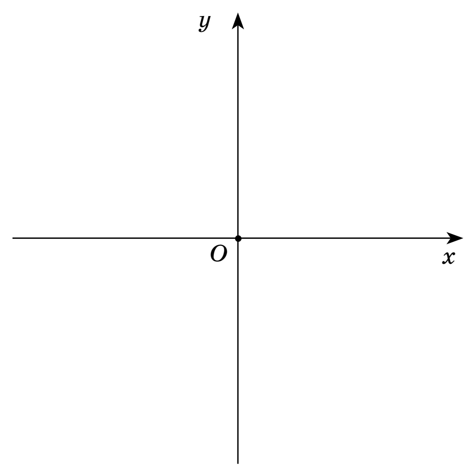
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Схематически изобразите графическое решение уравнений:**

а) $\sqrt[4]{6x} = 5$



б) $\sqrt[3]{2x} = 1$



Ответы на тестовые задания к неделе 9

1 — 1. **2** — 1. **3** — 6.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 10

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.1. Уравнения

2.1.4. Тригонометрические уравнения

2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Разложение на множители

Применение этого метода основано на том, что уравнение $f(x)\cdot\varphi(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{array}\right.$ в области определения уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=0$.

Тригонометрические уравнения

Пример. Решите уравнение:

$\sin 2x - \sin x = 0$.

Решение.

$$\sin 2x - \sin x = 0;\ 2\sin\frac{2x-x}{2}\cos\frac{2x+x}{2}=0;\ 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2}=0; \\ \cos\dfrac{3x}{2}=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\pi n,\ n\in Z; \\ \dfrac{3x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2\pi n,\ n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi n,\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ n,k\in Z$.

Замена переменной

Это довольно распространённый метод. С его помощью повторяющееся выражение заменяют одной переменной, решают полученное уравнение относительно этой новой переменной и возвращаются к начальной переменной, делая обратную замену.

Тригонометрические уравнения

Если уравнение, содержащее две или более тригонометрические функции, удаётся свести к какой-либо одной ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др.), то после соответствующей замены переменной тригонометрическое уравнение преобразуется в алгебраическое относительно сделанной замены переменной. Если алгебраическое уравнение удаётся решить, то тем самым исходное уравнение сводится к одному или к совокупности нескольких простейших уравнений.

Особо отметим тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным.

Пример 1. Решите уравнение: $\sin x + 2\cos^2 x - 1 = 0$.

Решение. Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим:

$\sin x + 2\,(1-\sin^2 x) - 1 = 0,\ -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0,$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

Выполнив замену $\sin x = t,\ t\in[-1;\ 1]$, получим квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$.

Решив это уравнение, найдём $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ n,\ k \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение: $\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{ctg}\,x = 4$.

Решение. Пусть $\mathrm{tg}\,x = t$, тогда $t + \frac{3}{t} = 4$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$.

Имеем:

1) $\mathrm{tg}\,x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}\,x = 3$; $x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \mathrm{arctg}\,3 + \pi k,\ n, k \in Z$.

Если уравнение содержит одно из выражений $(\sin x + \cos x)$ или $(\sin x - \cos x)$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x \cos x$), то, вводя новую переменную $t = \sin x + \cos x$ или $t = \sin x - \cos x$, приходим к уравнению относительно t.

Это связано с тем, что, если обозначить

$$t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \\ = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2\sin x \cos x + 1 = \\ = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

Если обозначить

$$t = \sin x - \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \\ \sin 2x = 1 - t^2.$$

Пример 3. Решите уравнение:
$5(\sin x + \cos x)^2 - 13\,(\sin x + \cos x) + 8 = 0$.

Решение. Обозначив $t = \sin x + \cos x$, тогда $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$, получаем:

$$5t^2 - 13t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t_1 = 1 & \text{(а)} \\ t_2 = 1{,}6 & \text{(б)} \end{array}\right.$$

Рассмотрим каждое из уравнений в отдельности.

а) $$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите корни уравнения

$$\cos\frac{\pi(x+2)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В ответ запишите наименьший положительный корень.

2. Найдите количество корней уравнения $\sin 7x - \sin 5x = 0$ на интервале $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos\frac{\pi(x-3)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Определите количество корней уравнения $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$ на интервале $[0;\pi]$.

____

5. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и укажите в ответе количество корней на интервале $[0;\pi]$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Заметим, что уравнение $\sin x+\cos x=1$ можно было бы решать, применяя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $1 - \cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, т. е.

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2m\pi,\ m\in Z\\ 1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2m\pi,\ m\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Этот ответ совпадает с полученным ранее, т. к., полагая $n = 2m$ и $n = 2k + 1$, получаем совпадение ответов.

б) $\sin x + \cos x = 1{,}6 \Leftrightarrow$ решений нет, поскольку число $1{,}6 > \sqrt{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in Z.$

Использование свойств функций

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x0 \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство $f(x) = g(x)$ возможно в случае $\begin{cases}f(x)=a;\\ g(x)=a.\end{cases}$

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке x, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Тригонометрические уравнения

Решение тригонометрических уравнений с использованием ограниченности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Решая подобные уравнения, нередко приходят к системам тригонометрических уравнений.

Пример. Решите уравнение: $\cos\frac{x}{2}+\cos 2x = 2.$

Решение. Так как $\cos\frac{x}{2}$, $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, то сумма их равна 2 тогда и только тогда, когда $\cos\frac{x}{2}=1$, $\cos 2x=1$ одновременно. Отсюда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}=1\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4n\pi, n\in Z\\ x=k\pi, k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow x=4n\pi, n\in Z$$

(поскольку серия решений $x = 4n\pi$, $n \in Z$ полностью содержит серию $x=k\pi, k\in Z$).

Ответ: $4n\pi$, $n \in Z$.

Использование графиков

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ очень проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций. Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.

Тригонометрические уравнения

Пример. Решите уравнение: $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Её графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдём из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$; $2x - 2 = 0$; $x = 1$, $y(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 = 1$.

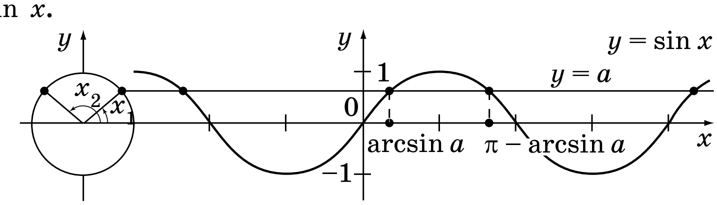
Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получим $y_{\text{наим}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством $y_{\text{наиб}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases}\cos 2\pi x = 1,\\ x^2 - 2x + 2 = 1.\end{cases}$$

Ответ: 1.

Уравнение $\sin x = a$.

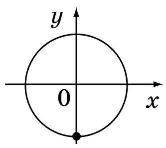
Функция $y = \sin x$.



$a<-1$	$-1\leqslant a\leqslant 1$	$a>1$
$\varnothing$	$x_1=\arcsin a+\pi n,\ n\in Z,$ $x_2=\pi-\arcsin a+\pi n,\ n\in Z.$ Эти две формулы можно объединить в одну: $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z$	$\varnothing$

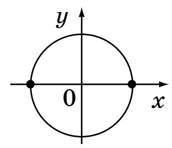
Особые случаи:

$\sin x=-1$



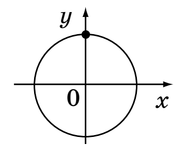
$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

$\sin x=0$



$x=\pi n,\ n\in Z$

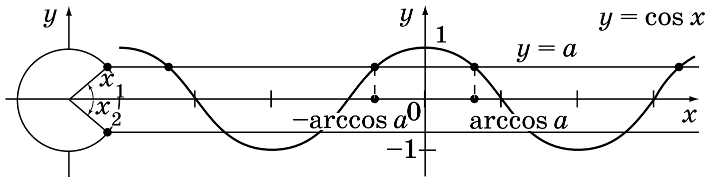
$\sin x=1$



$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

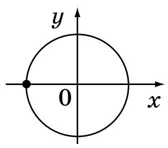
Уравнение $\cos x = a$.
Функция $y = \cos x$.



$a < -1$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$a > 1$
$\varnothing$	$x_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$, $x_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$. Эти две формулы можно объединить в одну: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	$\varnothing$

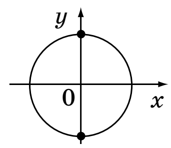
Особые случаи:

$\cos x = -1$



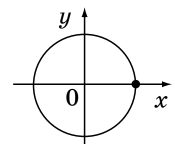
$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 0$



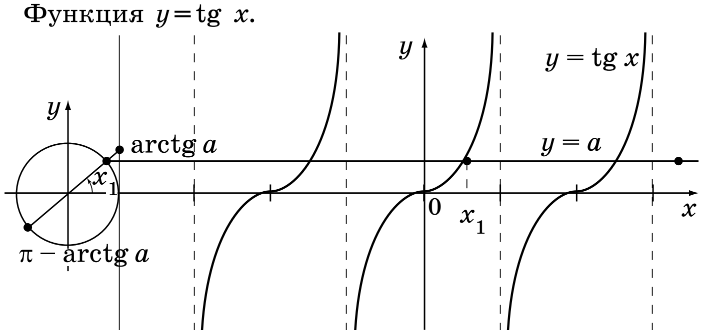
$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 1$



$x = 2\pi n,\ n \in Z$

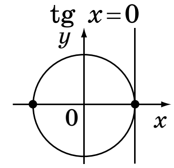
Уравнение $\operatorname{tg} x = a$.
Функция $y = \operatorname{tg} x$.



$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$

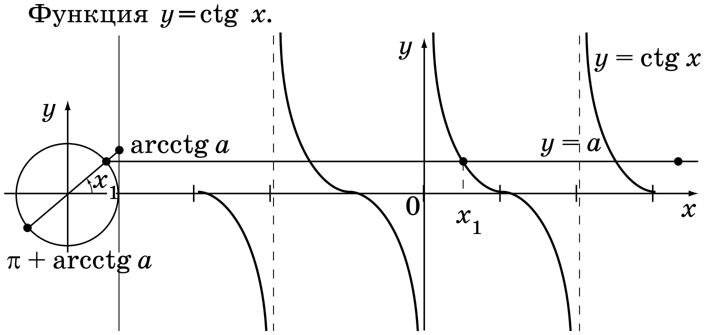
Особый случай:

$\operatorname{tg} x = 0$



$x = \pi n,\ n \in Z$

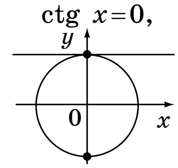
Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$.
Функция $y = \operatorname{ctg} x$.



$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

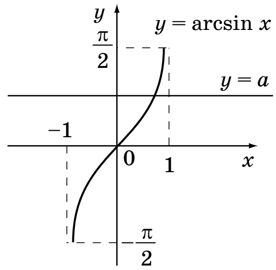
Особый случай:

$\operatorname{ctg} x = 0$,



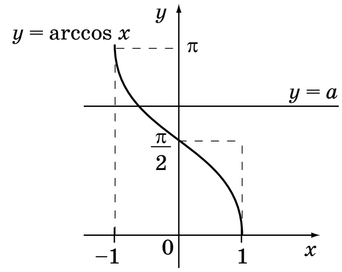
$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

Уравнение arcsin $x=a$.
Функция $y=\arcsin x$.



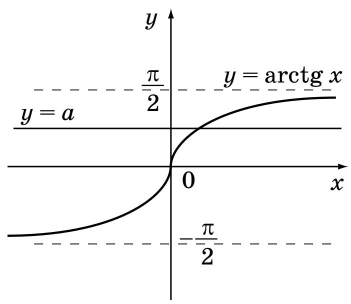
$a < -\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2} \le a \le \dfrac{\pi}{2}$	$a > \dfrac{\pi}{2}$
$\varnothing$	$x=\sin a$	$\varnothing$

Уравнение arccos $x=a$.
Функция $y=\arccos x$.



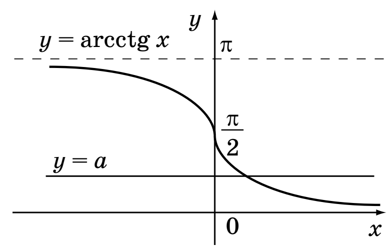
$a<0$	$0\leqslant a\leqslant\pi$	$a>\pi$
$\varnothing$	$x=\cos a$	$\varnothing$

Уравнение arctg $x=a$.
Функция $y=\operatorname{arctg} x$.



$a \le -\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$	$a \ge \dfrac{\pi}{2}$
$\varnothing$	$x=\operatorname{tg} a$	$\varnothing$

Уравнение ctg $x=a$.
Функция $y=\operatorname{arcctg} x$.



$a\leqslant 0$	$0<x<\pi$	$a\geqslant\pi$
$\varnothing$	$x=\operatorname{ctg} a$	$\varnothing$

Использование нескольких приёмов при решении уравнений

Решение тригонометрических уравнений, однородных относительно синуса и косинуса, а также приводимых к однородным

Однородными тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

- $a_0\sin\alpha x + a_1\cos\alpha x = 0$ (однородные уравнения 1-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$;
- $a_0\sin^2\alpha x + a_1\sin\alpha x\,\cos\alpha x + a_2\cos^2\alpha x = 0$ (однородные уравнения 2-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$;
- $a_0\sin^3\alpha x + a_1\sin^2\alpha x\,\cos\alpha x + a_2\sin\alpha x\,\cos^2\alpha x + a_3\cos^3\alpha x = 0$ (однородные уравнения 3-й степени), $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$.

Уравнение $a_0\sin^2\alpha x + a_1\sin\alpha x\,\cos\alpha x + a_2\cos^2\alpha x = c$ при $c \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению 2-й степени, заменив число c тождественно равным ему выражением $(\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x)\cdot c$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Для решения однородных уравнений в случае $a_0 \neq 0$ рассмотрим такие значения x, для которых $\cos\alpha x = 0$. Тогда из исходного однородного уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin\alpha x = 0$, а это невозможно, т. к. противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x = 1$. Отсюда решениями однородных уравнений (при $a_0 \neq 0$) могут быть только такие значения x, для которых $\cos\alpha x \neq 0$. Таким образом, однородное тригонометрическое уравнение можно свести к уравнению относительно $\operatorname{tg}\alpha x$, если все его члены разделить на $\cos^k\alpha x$ и при этом (если $a_0 \neq 0$) такое деление не приведёт к потере решений, поскольку значения x, при которых $\cos\alpha x = 0$, не удовлетворяют исходному уравнению. Если же $a_0 = 0$, то такое деление приведёт к потере корней, и, значит, в ответ следует включить решения уравнения $\cos\alpha x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{n\pi}{\alpha}, n \in Z$.

Пример. Решите уравнение: $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$2\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + n\pi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi, n \in Z.$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi,\ n \in Z$.

Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

При использовании универсальной подстановки функции $\sin x$, $\cos x$ выражаются через $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ по следующим формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Используя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, следует обратить внимание на то, что ОДЗ левой части этих формул: $x \in R$, а ОДЗ правых частей: $\cos\frac{x}{2} \neq 0;\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z,$ поэтому применяя эти формулы, необходимо отдельно рассмотреть случай $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ (проверить, не являются ли числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ решениями исходного уравнения).

Пример. Решите уравнение: $2\sin x + \cos x = 2$.

Решение. Выполнив в исходном уравнении подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, получаем уравнение:

$2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow\ t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{3}.$

Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ получаем: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z.$

Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in Z.$

Остается проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2m\pi,\ m \in Z$. Подставляя $x = \pi + 2m\pi$ в исходное уравнение, имеем:

$$2\sin(\pi + 2m\pi) + \cos(\pi + 2m\pi) = 2 \cdot 0 + (-1) = -1 \neq 2;$$

значит, числа $x = \pi + 2m\pi,\ m \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi,\ n, k \in Z.$

Метод введения вспомогательного аргумента

Иногда при решении тригонометрических уравнений полезно воспользоваться формулой

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi),$$

где $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример. Решите уравнение: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Решение. Поскольку $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = 2$, то

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n\in\mathrm{Z}.$$

В процессе решения мы учли тот факт, что если $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, то φ можно положить равным $\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + n\pi,\ n\in\mathrm{Z}.$

Решение уравнений преобразованием суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

Пример. Решите уравнение: $\sin\alpha x = \sin\beta x$.

Решение. $\sin\alpha x = \sin\beta x \Leftrightarrow \sin\alpha x - \sin\beta x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{(\alpha-\beta)x}{2}\cos\dfrac{(\alpha+\beta)x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{(\alpha-\beta)x}{2}=0\\ \cos\dfrac{(\alpha+\beta)x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{(\alpha-\beta)x}{2}=n\pi\\ \dfrac{(\alpha+\beta)x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi n}{\alpha-\beta},\ n\in\mathrm{Z}\\ x=\dfrac{\pi+2k\pi}{\alpha+\beta},\ k\in\mathrm{Z}\end{array}\right..$$

Ответ: $\dfrac{2n\pi}{\alpha-\beta};\ \dfrac{\pi+2k\pi}{\alpha+\beta},\ n,\ k\in\mathrm{Z}.$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример. Решите уравнение: $\cos 3x\cos 9x = \cos x\cos 7x$.

Решение. Применив формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получаем: $\dfrac{1}{2}(\cos 12x + \cos 6x) = \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\sin 10x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 10x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10x = n\pi\\ 2x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{n\pi}{10},\ n\in\mathrm{Z}\\ x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathrm{Z}\end{array}\right..$$

Серия решений $x=\dfrac{kp}{2}$, $k\in\mathrm{Z}$ является подмножеством серии решений $x=\dfrac{n\pi}{10}, n\in\mathrm{Z}$, поэтому в ответе нужно записать $x=\dfrac{n\pi}{10}, n\in\mathrm{Z}$ (при $n = 5k$ серии $x=\dfrac{n\pi}{10}$ и $x=\dfrac{k\pi}{2}$ совпадают).

Ответ: $\dfrac{n\pi}{10},\ n\in\mathrm{Z}.$

Замечание. Поскольку элементы множеств $\frac{k\pi}{10}$ и $\frac{k\pi}{2}$, $n, k \in Z$ сравниваются друг с другом, то для обозначения целочисленных параметров в примере необходимо использовать различные буквы.

Тригонометрические уравнения, решаемые с применением формул понижения степени

При решении подобного рода уравнений пользуются формулами понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{ и } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример. Решите уравнение: $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

Решение. Применив формулу понижения степени

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, получаем: $\frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} + \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow \cos 10x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$

Применив к первым двум слагаемым формулу преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение, получаем:

$$2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \cos 8x\,(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 8x = 0 \\ 2\cos 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}, n \in \mathrm{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathrm{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8};\ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ n,\ k \in \mathrm{Z}$.

Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

Пример. Решите уравнение: $\sin 2x = \cos x$.

Решение. В левой части применим формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Делить обе части полученного уравнения на $\cos x$ нельзя, поскольку это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$. Получаем:

$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathrm{Z} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z} \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + n\pi;\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств для тригонометрических соотношений:**

$\sin^2 x =$	$= \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$
$\cos^2 x =$	$= \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$
$\sin x =$	$= 1-\sin^2 x$
$\cos x =$	$= 2\sin x\cos x$
$\operatorname{tg} 2x =$	$= \cos 2x - \sin 2x$
$\sin 2x =$	$= \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$
$\cos 2x =$	$= 1-\cos^2 x$

Ответы на тестовые задания к неделе 10

1 — 9. **2** — 3. **3** — –4. **4** — 1. **5** — 3.

НЕДЕЛЯ 11

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.1. Уравнения

2.1.5. Показательные уравнения

2.1.6. Логарифмические уравнения

2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Разложение на множители

Применение этого метода основано на том, что уравнение $f(x)\cdot\varphi(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{array}\right.$ в области определения уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=0$.

Показательные уравнения

Пример 1. Решите уравнение: $2^{5x}-2^{4x}-2^{3x}+2^{2x}+2^x-1=0$.

Решение. $2^{5x}-2^{4x}-2^{3x}+2^{2x}+2^x-1=0$; $(2^{5x}-2^{4x})-(2^{3x}-2^{2x})+(2^x-1)=0$;

$2^{4x}(2^x-1)-2^{3x}(2^x-1)+(2^x-1)=0$; $(2^x-1)(2^{4x}-2^{3x}+1)=0$; $\left[\begin{array}{l} 2^x-1=0; \\ 2^{4x}-2^{2x}+1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0; \\ \text{решений нет.} \end{array}\right.$

Ответ: 0.

Пример 2. Решите уравнение: $36^x-6^x=0$.

Решение. $36^x-6^x=0$; $6^x(6^x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l} 6^x=0; \\ 6^x-1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 6^x=0 \text{ — решений нет;} \\ 6^x=1; \end{array}\right.$ $6^x=1$; $x=0$.

Ответ: 0.

Логарифмические уравнения

Пример 1. Решите уравнение: $\log_5^2 x-\log_5 x=0$.

Решение. $\log_5^2 x-\log_5 x=0$; $\log_5 x(\log_5 x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l} \log_5 x=0; \\ \log_5 x-1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=5^0; \\ x=5^1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=5. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 5.

Пример 2. Решите уравнение: $(x^2-1)\log_3(x+1)=0$.

Решение. ОДЗ: $x+1>0$; $x>-1$.

$(x^2-1)\log_3(x+1)=0$; $\left[\begin{array}{l} x^2-1=0; \\ \log_3(x+1)=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm1; \\ x+1=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm1; \\ x=0; \end{array}\right.$ $x=-1$ — не входит в ОДЗ.

Следовательно, $x=0$, $x=1$.

Ответ: 0; 1.

Замена переменной

Повторяющееся выражение заменяют одной переменной, решают полученное уравнение относительно этой новой переменной и возвращаются к начальной переменной, делая обратную замену.

Показательные уравнения

Сведение к одной и той же показательной функции

Пример. Решите уравнение: $3^x + 3^{x+1} = 108$.

Решение. $3^x + 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x \cdot (1+3) = 108 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{108}{4} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3.$

Решение показательных уравнений, сводящихся к квадратным или алгебраическим уравнениям высших степеней

Уравнения вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводятся к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$, где $y > 0$.

Пример 1. Решите уравнение: $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Решение. Обозначив $5^x = y > 0$, получаем $y^2 - 6y + 5 = 0$, корни которого $y_1 = 5$, $y_2 = 1$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} 5^x = 5 \\ 5^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ответ: 1; 0.

Уравнения вида $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ с помощью подстановки $a^{f(x)} = y$ сводятся к алгебраическому (квадратному) уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример 2. Решите уравнение: $3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$.

Решение. Пусть $3^{x^2} = y$, тогда $3^{2x^2} = (3^{x^2})^2 = y^2$, $y \geq 1$.
Подставив в исходное уравнение, получаем:
$y^2 - 12y + 27 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 3,\ y_2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2} = 3 \\ 3^{x^2} = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ответ: ± 1; $\pm\sqrt{2}$.

Решение показательных уравнений, сводящихся к алгебраическим уравнениям высших степеней

Пример. Решите уравнение: $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$.

Решение. $8^x = (2^3)^x = (2^x)^3$, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$. Обозначив $2^x = y$, $y > 0$, получаем: $y^3 - 2y - 4 = 0$; $(y-2)(y^2 + 2y + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 2 = 0 \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ \text{решений нет} \end{array}\right.$,

$y = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Ответ: 1.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите решение уравнения

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x-9} = 7^{2x}.$$

2. Решите уравнение

$$2^{2\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{2\sqrt{x}-1} = 40.$$

3. Решите уравнение

$$5^x + 6^x = 11^x.$$

4. Решите уравнение $3^{11-2x} = 243$.

5. Решите уравнение $2^{x-2} = 3^{x-2}$.

6. Найдите корень уравнения

$$\log_3(4 - x) = 4.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

7. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 4$ моля воздуха объёмом $V_1 = 15$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, а $T = 300°$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 980 Дж?

____

8. Определите количество корней уравнения

$$\log_7\left(\sqrt{2}\sin x\right) = \log_{49}(2 + \cos x),$$

находящихся в интервале $[0; 2\pi]$.

____

9. Найдите корень уравнения

$$\log_5\left(x^2 - 1\right) = \log_5(7x - 7).$$

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Логарифмические уравнения

Решение логарифмических уравнений методом замены переменной

При решении уравнений этим методом необходимо обратить внимание на следующее:

$$\log_a^2(x^2) = (\log_a x^2)^2 = (2\log_a |x|)^2 = 2^2(\log_a |x|)^2 = 4\log_a^2 |x|;$$

$$\log_a^2 x^3 = (\log_a x^3)^2 = (3\log_a x)^2 = 3^2 \log_a^2 x = 9\log_a^2 x.$$

В общем случае $\log_a^n x^m = (\log_a x^m)^n = (m\log_a x)^n = m^n \log_a^n x$, где $x > 0$, если m — нечётное число. Если $m = 2k$ (m — чётное число), то при $x \neq 0$

$$\log_a^n x^m = \log_a^n x^{2k} = (2k)^n \cdot \log_a^n |x| = m^n \log_a^n |x|.$$

Пример. Решите уравнение: $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

Решение. $\lg^2(x^3) = (3\lg x)^2 = 3^2 (\lg x)^2 = 9\lg^2 x$.

Отсюда исходное уравнение равносильно такому:

$2 \cdot 9\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow 18\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0$.

Пусть $\lg x = t$. Тогда

$$18t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 18}}{2 \cdot 18} = \frac{3 \pm 9}{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\ t_2 = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = \frac{1}{3} \\ \lg x = -\frac{1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{\frac{1}{3}} \\ x = 10^{-\frac{1}{6}} \end{array}\right..$$

Ответ: $10^{-\frac{1}{6}}, 10^{\frac{1}{3}}$.

Использование свойств функций

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство $f(x) = g(x)$ возможно в случае $\begin{cases} f(x) = a; \\ g(x) = a. \end{cases}$

Если нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке x, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Показательные уравнения

Решение показательных уравнений методом подбора.

При решении показательных уравнений этим методом сначала находят путем подбора корень исходного уравнения, а затем доказывают, что этот корень — единственный, используя свойства монотонности показательной функции.

Пример 1. Решите уравнение: $6^x + 8^x = 10^x$.

Решение. Подбором находим, что $x = 2$ — корень исходного уравнения. Покажем, что других корней нет. Разделив исходное уравнение на 10^x, получаем равносильное уравнение:

$$\frac{6^x}{10^x} + \frac{8^x}{10^x} = \frac{10^x}{10^x} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

а) Покажем, что среди чисел $x < 2$ корней нет. Если $x < 2$, то

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$ при $x < 2$ корней нет.

б) Покажем, что среди чисел $x > 2$ корней исходного уравнения также нет. Если $x > 2$, то

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$ при $x > 2$ исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: $\{2\}$.

Решение показательных уравнений

Уравнение	Решение	Пример
$a^{f(x)} = b$, $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$	$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$	$3^{2x+3} = 2 \Leftrightarrow 2x + 3 = \log_3 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x = \log_3 2 - 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log_3 2 - 1{,}5$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $(a > 0,\ a \neq 1)$	$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$	$2^{x+3} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^{2{,}5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 3 = 2{,}5 \Leftrightarrow x = -0{,}5$
$b_1a^{mx+k_1} + b_2a^{mx+k_2} + \ldots$ $\ldots + b_na^{mx+k_n} = c$	$b_1a^{mx+k_1} + b_2a^{mx+k_2} + \ldots$ $\ldots + b_na^{mx+k_n} = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{mx}\left(b_1a^{k_1} + b_2a^{k_2} + \ldots\right.$ $\left.\ldots + b_na^{k_n}\right) = c$	$7^x + 7^{x+2} = 350 \Leftrightarrow 7^x + 7^x(7^2) = 350 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7^x(1 + 7^2) = 350 \Leftrightarrow 7^x \cdot 50 = 350 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$
$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$	$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^x = t, \\ At^2 + Bt + C = 0 \end{cases}$	$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7^x = t, \\ t^2 - 8t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7^x = t, \\ \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7^x = 1, \\ 7^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{0;\ 1\}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Уравнение	Решение	Пример
$Aa^{2x}+Ba^{x}b^{x}+Cb^{2x}=0$	$Aa^{2x}+Ba^{x}b^{x}+Cb^{2x}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0$	$3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}=5\cdot 36^{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}=5\cdot 4^{x}\cdot 9^{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3\cdot 4^{2x}}{9^{2x}}+\frac{2\cdot 9^{2x}}{9^{2x}}=\frac{5\cdot 4^{x}\cdot 9^{x}}{9^{2x}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\left(\frac{4}{9}\right)^{x}+2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=t,\\ 3t^{2}-5t+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=t,\\ \left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3},\\ t=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^{x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};\,0\right\}$

Логарифмические уравнения

Пример. Решите уравнение: $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x>0;\\ 1-x^2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0;\\ x^2\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0;\\ |x|\le 1;\end{cases}$ $0<x\leqslant 1$.

На ОДЗ функция $y=\log_5 x$ — возрастающая, а функция $y=\sqrt{1-x^2}$ — убывающая, поэтому уравнение $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$ имеет один корень, $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Решение логарифмических уравнений

Уравнение $a>0,\ a\neq 1$	Решение	Пример
$\log_a f(x)=b$	$f(x)=a^{b}$	$\log_3(x-12)=2 \Leftrightarrow x-12=3^{2} \Leftrightarrow x-12=9 \Leftrightarrow x=21$
$\log_a f(x)=\log_a g(x)$	$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)>0\end{cases}$	$\lg(2x^{2}+3x)=\lg(6x+2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2x^{2}+3x=6x+2,\\ 6x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-0,5,\end{array}\right.\\ x>-\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

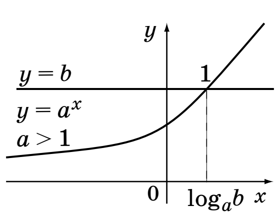
Уравнение $a>0,\ a\neq 1$	Решение	Пример
$\log_a f(x)=g(x)$	$\begin{cases} f(x)=a^{g(x)}, \\ f(x)>0 \end{cases}$	$\log_2(2^{x+1}-1)=x \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+1}-1=2^x, \\ 2^{x+1}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x=1, \\ 2^{x+1}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ 2^{x+1}>1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$
$b_1\log_a f_1(x)+$ $+b_2\log_a f_2(x)=$ $=c\log_a f_3(x)$	$\begin{cases} f_1(x)>0, \\ f_2(x)>0, \\ f_3(x)>0, \\ f_1^{b_1}(x)\cdot f_2^{b_2}(x)=f_3^{c}(x) \end{cases}$	$\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=\log_5(x+2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)=x+2, \\ x-1>0, \\ x-2>0, \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x=0, \\ x>1, \\ x>2, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$

Использование графиков

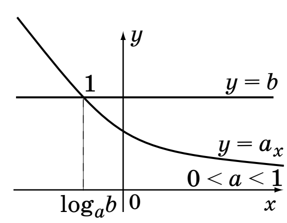
Идея графического метода решения уравнения $f(x)=g(x)$ очень проста: нужно построить графики функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций. Если, например, одна из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.

Показательные уравнения

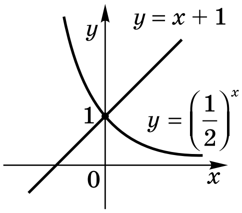


$b\leqslant 0$: $\varnothing$.



$b>0$: $x=\log_a b$.

Пример. Решите уравнение: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=x+1$.

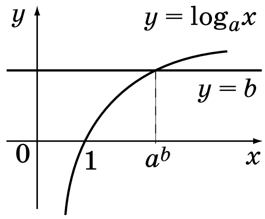


Решение. Построив в одной системе координат графики $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ и $y=x+1$, замечаем, что они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=x+1$ имеет единственный корень: $x=0$.

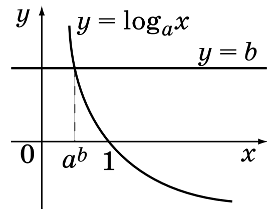
Ответ: 0.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Логарифмические уравнения



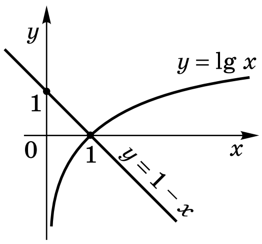
$a<1$



$0<a<1$

$$x=a^b$$

При решении логарифмических уравнений графическим способом необходимо помнить, что график любой логарифмической функции $y=\log_a x$ проходит через точку (1; 0).



Пример. Решите уравнение: $\lg x = 1 - x$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y=\lg x$ и $y = 1 - x$, замечаем, что они имеют одну общую точку (1; 0). Значит, уравнение $\lg x = 1 - x$ имеет единственный корень: $x = 1$.

Ответ: 1.

Использование нескольких приёмов при решении показательных уравнений

Решение показательных уравнений, приводимых к простейшим, с использованием метода уравнивания показателей степеней

Сначала приводят показательные уравнения к одному основанию в обеих частях равенства, затем уравнивают показатели степеней левой и правой частей равенства, после этого решают полученное уравнение.

Пример. Решите уравнение: $(0,25)^{2-x} = \dfrac{256}{2^{x+3}}$.

Решение. Приведём степени к одинаковому основанию, а затем приравняем показатели степеней: $0,25 = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}, \dfrac{256}{2^{x+3}} = \dfrac{2^8}{2^{x+3}} = 2^{5-x}$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно такому:

$(2^{-2})^{2-x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{-4+2x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow -4 + 2x = 5 - x \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ: 3.

Решение уравнений вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ ($a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$)

Эти уравнения решаются путем деления обеих частей на $b^{f(x)}$ или на $a^{f(x)}$.

Пример. Решите уравнение: $6^{x+1} = 37^{x+1}$.

Решение. $6^{x+1} = 37^{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{6^{x+1}}{37^{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{6}{37}\right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Ответ: −1.

Решение уравнений вида $A \cdot a^{f(x)} = B \cdot b^{g(x)}$

Эти уравнения сводятся к алгебраическим путем логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию.

Пример. Решите уравнение: $2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7$.

Решение. Исходное уравнение можно решить двумя способами.

1-й способ. Логарифмируем обе части по одному и тому же основанию, например по основанию 3. Тогда имеем:

$$\log_3(2 \cdot 5^x) = \log_3(3^{x-1} \cdot 7) \Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3(5^x) = \log_3(3^{x-1}) + \log_3 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 + x\log_3 5 = (x-1)\log_3 3 + \log_3 7 \Leftrightarrow \log_3 2 + x\log_3 5 = x - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\log_3 5 - x = -\log_3 2 - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow x(\log_3 5 - 1) = \log_3 7 - \log_3 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - 1}{\log_3 5 - 1} = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - \log_3 3}{\log_3 5 - \log_3 3} = \frac{\log_3\left(\frac{7}{6}\right)}{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)} = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right).$$

2-й способ. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = \frac{3^x}{3} \cdot 7 \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} = \frac{7}{3 \cdot 2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right).$$

Как видим, ответы совпали, однако второй способ для данного примера является более рациональным.

Ответ: $\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right)$.

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

Пример. Решите уравнение: $3^x + 3^{x+1} = 108$.

Решение. $3^x + 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow 3^x \cdot (1 + 3) = 108 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{108}{4} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Уравнения вида $Aa^x + Ba^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}} + Cb^x = 0$ (однородное уравнение) сводятся к квадратному путем деления обеих частей исходного уравнения на a^x, или на b^x, или на $(ab)^{\frac{x}{2}}$. Например, при делении на $a^x \neq 0$ имеем уравнение, эквивалентное данному:

$$A\frac{a^x}{a^x} + B\frac{a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}}{a^x} + C\frac{b^x}{a^x} = 0 \Leftrightarrow A + B\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} + C\left(\frac{b}{a}\right)^x = 0.$$

Замена $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = y$ приводит исходное уравнение к квадратному:

$$A + By + Cy^2 = 0.$$

Пример. Решите уравнение: $9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

Решение. Поскольку $12 = 3 \cdot 4$, $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, то исходное уравнение можно записать в виде $9 \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 3^x \cdot 4^x - 16 \cdot 3^{2x} = 0$. Делим обе части исходного уравнения на $4^{2x} = 16^x$. Получаем:

$$9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0 (: 16^x \neq 0) \Leftrightarrow 9 - 7 \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^x - 16 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 9 - 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 16 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^2 = 0.$$

Замена $\left(\frac{3}{4}\right)^x = y > 0$ приводит исходное уравнение к квадратному:

$9 - 7y - 16y^2 = 0 \Leftrightarrow 16y^2 + 7y - 9 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{9}{16},\ y_2 = -1.$ $y_2 = -1$ отпадает, т. к. $y > 0$.

Отсюда $y = \dfrac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \dfrac{9}{16} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

Уравнения вида $M\left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x + N\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x = p$, где $a^2 - b = 1$ сводятся к квадратному посредством замены

$\left(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}\right)^x = y$ или замены $\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\right)^x = y$.

Пример. Решите уравнение: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Решение. Поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, то, заменив $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y;\ y > 0$, получаем:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\right)^x = \left(\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = \frac{1}{y}.$$

Отсюда исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$y + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Ответ: ± 2.

Решение показательных уравнений вида

$$Aa^{nx} + Ba^{mx}b^{(n-m)x} + Cb^{nx} = 0,\ (a > 0,\ b > 0,\ a \ne 1,\ b \ne 1)$$

предполагает следующее рассуждение: в этом уравнении сумма показателей степеней чисел a и b в каждом слагаемом одинакова и равна nx.

Разделив почленно исходное уравнение на b^{nx}, получаем:

$$A \cdot \frac{a^{nx}}{b^{nx}} + B \cdot \frac{a^{mx} \cdot b^{nx} \cdot b^{-mx}}{b^{nx}} + C \cdot \frac{b^{nx}}{b^{nx}} = 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{a}{b}\right)^{nx} + B\left(\frac{a}{b}\right)^{mx} + C = 0.$$

Обозначив $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = y$, получаем алгебраическое уравнение $Ay^n + By^m + C = 0$.

Решив это уравнение, находим его корни, а затем возвращаемся к переменной x.

Пример. Решите уравнение: $64^x + 36^x - 10 \cdot 27^x = 0$.

Решение. $64 = 4^3$, $36 = 3^2 \cdot 4$, $27 = 3^3$. Отсюда исходное уравнение можно записать в виде $4^{3x} + 3^{2x} \cdot 4^x - 10 \cdot 3^{3x} = 0$. Разделив исходное уравнение почленно на $3^{3x} = 27^x$, получаем:

$$\left(\frac{64}{27}\right)^x + \left(\frac{36}{27}\right)^x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 10 = 0 \Leftrightarrow y^3 + y - 10 = 0 \text{ (где } y = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0\text{)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 2 = 0 \\ y^2 + 2y + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

Ответ: $\log_{\frac{4}{3}} 2$.

НЕДЕЛЯ 11. Уравнения и неравенства

Использование нескольких приёмов при решении логарифмических уравнений

Решение логарифмических уравнений потенцированием

Пример. Решите уравнение: $\log_3 (x+1) + \log_3 (x+3) = 1$.

Решение.

$$\begin{cases} \log_3\left(x+1\right) + \log_3(x+3) = 1 \\ x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1)(x+3) = 1 \\ x>-1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+4x+3) = 1 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3=3 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x=0 \\ x>-1 \end{cases}.$$

Ответ: 0.

Решение уравнений с применением основного логарифмического тождества:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Пример. Решите уравнение: $\log_4(2^{4x}) = 2^{\log_2 4}$.

Решение. Согласно основному логарифмическому тождеству $2^{\log_2 4} = 4$.

Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$\log_4 (2^{4x}) = 4 \Leftrightarrow 2^{4x} = 4^4 \Leftrightarrow 2^{4x} = (2^2)^4 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

Решение уравнений методом логарифмирования

Метод логарифмирования обычно применяется при решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени. Он заключается в том, что от уравнения $f(x) = g(x)$ переходят к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Пример. Решите уравнение: $x^{\lg x} = 10$.

Решение. Логарифмируя обе части исходного уравнения по основанию 10, приходим к уравнению, равносильному исходному:

$$x^{\lg x} = 10 \Leftrightarrow \lg(x^{\lg x}) = \lg 10 \Leftrightarrow \lg x \cdot \lg x = 1 \Leftrightarrow (\lg x)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 10^{-1} = 0{,}1 \end{array}\right..$$

Ответ: 0,1; 10.

Решение уравнений методом деления обеих частей на показательно-логарифмическую функцию

Пример. Решите уравнение: $3^{2\lg x} = 5^{3\lg x}$.

Решение.

$$3^{2\lg x} = 5^{3\lg x} \Leftrightarrow \frac{3^{2\lg x}}{5^{3\lg x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(3^2)^{\lg x}}{(5^3)^{\lg x}} \Leftrightarrow \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{125}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Решение уравнений путем перехода к другому основанию

Пример. Решите уравнение: $1 + \log_2 (x-1) = \log_{x-1} 4$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1, x \neq 2 \Leftrightarrow x \in (1;2) \cup (2;+\infty)$.

В выражении $\log_{x-1} 4$ переходим к основанию 2: $\log_{x-1} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} = \dfrac{2}{\log_2(x-1)}$.

Обозначив $\log_2(x-1)=t$, приходим к уравнению, эквивалентному исходному:

$$1+t=\frac{2}{t}\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)=1\\\log_2(x-1)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: 3; $1\frac{1}{4}$.

Решение логарифмических уравнений комбинированными методами

Пример. Решите уравнение: $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}=32$.

Решение. Приведём два способа решения исходного уравнения.

1-й способ. $2^{\log_2^2 x}=2^{\log_2 x\cdot\log_2 x}=(2^{\log_2 x})^{\log_2 x}=x^{\log_2 x}$.

Обозначив $x^{\log_2 x}=t;\ t>0,$ получаем: $t+t=32\Leftrightarrow t=16\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=16\Leftrightarrow\log_2(x^{\log_2 x})=\log_2 16\Leftrightarrow(\log_2 x)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\\log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^2=4\\x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: 4; $\frac{1}{4}$.

2-й способ. Обозначив $\log_2 x=y$, получаем: $x=2^y,\ 2^{\log_2^2 x}=2^{y^2}$. Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$2^{y^2}+(2^y)^y=32\Leftrightarrow 2^{y^2}+2^{y^2}=32\Leftrightarrow 2^{y^2}=\frac{32}{2}=16=2^4\Leftrightarrow y^2=4\Leftrightarrow$$

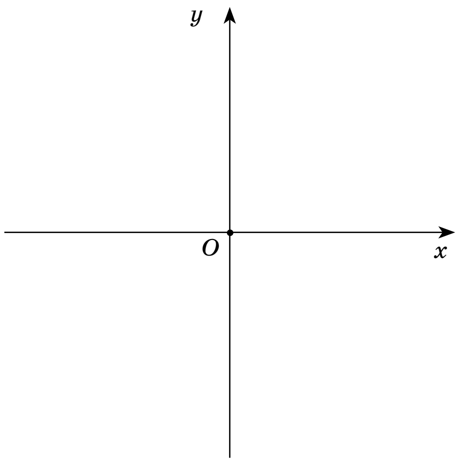
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\\log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^2=4\\x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: 4; $\frac{1}{4}$.

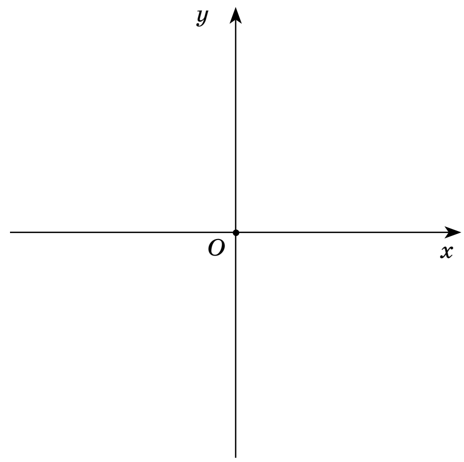
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Схематически изобразите графическое решение уравнений:**

а) $5^x = x + 2$



б) $\lg x = 1 - 2x$



Ответы на тестовые задания к неделе 11

1 — 3. **2** — 4. **3** — 1. **4** — 3. **5** — 2. **6** — –81. **7** — 7,5. **8** — 2. **9** — 6.

НЕДЕЛЯ 12

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.1. Уравнения
- 2.1.7. Равносильность уравнений, систем уравнений
- 2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными
- 2.1.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases}.$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases}.$$

Множество упорядоченных пар, троек (в случае систем с тремя переменными) и т. д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется **решением системы уравнений.**

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определённой**, если она имеет конечное число решений, и **неопределённой**, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными. Если система из n линейных уравнений содержит n неизвестных, то возможны следующие три случая:

1) система не имеет решений;
2) система имеет одно решение;
3) система имеет бесконечное множество решений.

Не решая системы линейных уравнений, можно определить количество её решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Так, для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases},$$

имеем:

а) если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение; геометрически это решение иллюстрируется как точка пересечения двух прямых, являющихся графиками уравнений системы;

б) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений; в этом случае прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают;

в) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений; в этом случае прямые совпадают.

Основными методами решения систем уравнений являются следующие:

1) метод подстановки; 2) метод алгебраического сложения (или метод преобразования системы); 3) метод замены переменных; 4) графический метод.

При решении системы **методом подстановки** сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной, затем решают это уравнение и находят соответствующее значение второй переменной.

При решении системы **методом алгебраического сложения** переходят от данной системы к равносильной ей, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную. При этом обычно умножают одно или оба уравнения на числовые множители таким образом, чтобы коэффициенты при x или y были одинаковыми, но с противоположными знаками.

Пример. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$

Решение. Решим исходную систему двумя способами: методом подстановки и методом алгебраического сложения.

1-й способ (метод подстановки). $\begin{cases} 2x+5y=12 & \text{(а)} \\ 3x-4y=-5. & \text{(б)} \end{cases}$

Из уравнения (а) $y = \frac{12-2x}{5}$.

Подставляя в уравнение (б), получаем:

$$3x - 4\left(\frac{12-2x}{5}\right) = -5 \Leftrightarrow 15x - 48 + 8x = -25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23x = 23 \Leftrightarrow x = 1,\ y = \frac{12-2x}{5} = \frac{12-2}{5} = 2.$$

Итак, окончательно $x = 1$, $y = 2$.

2-й способ (метод алгебраического сложения). Решая этим способом, умножим первое уравнение системы на 3, а второе на (–2) и сложим:

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 30; \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$$

В ответе запишите сумму $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 7; \\ 2^x + 3^y = 25. \end{cases}$$

В ответе запишите произведение $x_0 \cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 4; \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8. \end{cases}$$

В ответе запишите $x_0 - y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение данной системы.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=8; \\ 4x-3y=-2. \end{cases}$$

В ответе запишите $x_0 \cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

____

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y+\log_y x=2; \\ x^2-y=20. \end{cases}$$

В ответе запишите x_0+y_0, где $(x_0; y_0)$ — решение системы.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

$$\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 3x-4y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+15y=36 \\ -6x+8y=10 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6x + 15y - 6x + 8y = 36 + 10 \Leftrightarrow 23y = 46 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2,\ x=\dfrac{12-5y}{2}=\dfrac{12-10}{2}=1,$

окончательно $x = 1,\ y = 2.$

Заметим, что решение исходной системы методом подстановки можно было бы оформить следующим образом, используя только равносильные преобразования и символ $\Leftrightarrow$.

$$\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 3x-4y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{12-2x}{5} \\ 3x-4\left(\dfrac{12-2x}{5}\right)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-\dfrac{12-2x}{5} \\ 15x-4(12-2x)=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{12-2x}{5} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2).

Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения

Пример 1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=4+2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=4-2; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}=6, \\ 2\sqrt{y}=2; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x}=3, \\ \sqrt{y}=1; \end{cases} \begin{cases} x=9, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: (9; 1).

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$$

Решение. Введём новые переменные: $\sqrt[4]{x+y}=a$, $\sqrt[4]{x-y}=b.$ Тогда

$$\begin{cases} a-b=2, \\ a^2-b^2=8; \end{cases} \begin{cases} a-b=2, \\ (a-b)(a+b)=8; \end{cases} \begin{cases} a-b=2; \\ 2(a+b)=8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=2, \\ a+b=4; \end{cases} \begin{cases} a-b+a+b=4+2, \\ a+b-a+b=4-2; \end{cases} \begin{cases} 2a=6, \\ 2b=2; \end{cases} \begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases}$$

Возвращаясь к данным переменным, получаем:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=3,\\ \sqrt[4]{x-y}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=81;\\ x-y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y+x-y=81+1;\\ x+y-x+y=81-1;\end{cases}\quad \begin{cases}2x=82;\\ 2y=80;\end{cases}\quad \begin{cases}x=41;\\ y=40.\end{cases}$$

Ответ: (41; 40).

Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения

Рассмотрим некоторые приёмы, используемые при решении тригонометрических систем. Ограничимся системами с двумя переменными.

1. Системы, содержащие уравнения вида $x+y=a$ или $x-y=a$, подстановкой можно свести к одному уравнению.

Пример 1. $\begin{cases}\sin(x-y)=2\sin x\sin y;\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Решение. Из второго уравнения получим $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ и подставим в первое уравнение:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=2\sin x\cos x;\ -\cos 2x=\sin 2x;\ \operatorname{tg}2x=-1;$$

$x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Тогда $y=\dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\dfrac{5\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$.

2. В предыдущем примере получаемые соотношения между переменным x и y и множество решений системы записывались с помощью только одного целочисленного параметра. Обычно при решении систем появляются два параметра, т. к. употребление одного параметра может привести к потере корней.

Пример 2. $\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{3}{4};\\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Решение. Почленно сложим и вычтем уравнения системы, получим:

$$\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2};\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos(x-y)=\dfrac{1}{2};\\ \cos(x+y)=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\\ x+y=2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

Очевидно, что применение одного целочисленного параметра $(m=n)$ приведет к потере корней; получим совокупность систем, которую решим методом почленного сложения и вычитания уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\\ x+y=2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;\\ x+y=2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\end{array}\right.\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+\pi(m+n);\\ y=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-m);\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n);\\ y=\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k).\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi(m+n);-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-m)\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n);\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$; $m,\ n,\ k\in Z$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 **12** 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

3. В случаях, когда система содержит только две тригонометрические функции или приводится к такому виду, можно использовать введение новых переменных.

Пример 3. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1; \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение: $1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\cos^2 y = 1$; $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}$.

Обозначим $\sin x = u$; $\cos y = v$. Получим: $\begin{cases} u + v = 1; \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $u \in [-1; 1]$, $v \in [-1; 1]$.

Легко установить, что такая система имеет единственное решение: $u = \frac{1}{2}$ и $v = \frac{1}{2}$.

Поэтому $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}; \\ \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; $n, k \in \mathbb{Z}$ (подразумевается, что знак в формуле для y выбирается произвольно).

4. В ряде случаев для решения системы её преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например исключить одну из переменных, сделать замену переменных, разложить на множители и др.

Пример 4. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1; \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

Решение. Преобразуем уравнения системы по формулам суммы синусов и разности косинусов:

$\begin{cases} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}; \\ \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Замена: $\frac{x+y}{2} = u$; $\frac{x-y}{2} = v$. Тогда имеем: $\begin{cases} \sin u \cos v = \frac{1}{2}; \\ \sin u \sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Ясно, что если $(u; v)$ — решение системы, то $\cos v \sin u = \frac{1}{2} \neq 0$. Поэтому разделим почленно второе уравнение на первое. Получаем: $\operatorname{tg} v = -\sqrt{3}$; $v = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$; тогда

$\sin u \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{1}{2}$ или $\sin u \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{1}{2}$;

$\sin u \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ или $\sin u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin u = 1$ или $\sin u = -1$;

откуда $u = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}$. Тогда $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi m; \\ \frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi n. \end{cases}$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi(2m + n)$; $y = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi(2m - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Системы, содержащие одно или два показательных уравнения

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: **метод подстановки** и **метод замены переменных.**

Пример 1. $\begin{cases} x + y = 1; \\ 4^x + 4^y = 5. \end{cases}$

Решение. Используем метод подстановки. Из первого уравнения $y = 1 - x$ подставим это выражение во второе уравнение: $4^x + 4^{1-x} = 5$; $4^x + \dfrac{4^1}{4^x} = 5$. Замена: $4^x = t$, $t > 0$. Получим уравнение: $t + \dfrac{4}{t} = 5$ или $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 4$. Обратная замена: $4^x = 1$, тогда $x = 0$; $y = 1$. $4^x = 4$; $x = 1$; $y = 0$.

Ответ: (0; 1); (1; 0).

Пример 2. $\begin{cases} 5^x - 3^y = 16; \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$

Решение. Выполним замену: $5^{\frac{x}{2}} = t$; $3^{\frac{y}{2}} = z$; $t > 0, z > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 16; \\ t - z = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t - z)(t + z) = 16; \\ t - z = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(t + z) = 16; \\ t - z = 2; \end{cases} \begin{cases} t + z = 8; \\ t - z = 2; \end{cases}$$

$2t = 10$; $t = 5$; $z = 3$. Обратная замена: $5^{\frac{x}{2}} = 5$; $\dfrac{x}{2} = 1$; $x = 2$; $3^{\frac{y}{2}} = 3$, $\dfrac{y}{2} = 1$; $y = 2$.

Ответ: (2; 2).

Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения

Как и логарифмические уравнения, системы логарифмических уравнений можно решать как с помощью систем-следствий (каждое решение первой системы является решением второй системы), так и с помощью равносильных преобразований (все решения каждой из них являются решениями другой).

Кроме того, при решении систем логарифмических уравнений можно использовать традиционные для обычных систем методы: алгебраического сложения, подстановки некоторого выражения из одного уравнения в другое, замены переменных и др.

При использовании систем-следствий необходимо делать проверку полученных решений по начальной системе.

Пример 1. Решите систему: $\begin{cases} \log_2(xy) = 2; \\ \log_3(y - x) = 1. \end{cases}$

Решение. По определению логарифма $\begin{cases} xy = 2^2; \\ y - x = 3. \end{cases}$ Из второго уравнения системы выразим $y = x + 3$ и подставим в первое: $x(x + 3) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$; $\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 4; \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -4; \\ y_2 = -1. \end{cases}$

Проверка показывает, что (1; 4) — решение данной системы, (–4; –1) — тоже решение.

Ответ: (–4; –1), (1; 4).

Пример 2. Решите систему: $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}}; \\ \log_4 y \cdot \log_y (y-3x) = 1. \end{cases}$

Решение. Приведём первое уравнение к более простому виду, возьмём от обеих частей логарифм по основанию y:

$$\log_y (x^{\log_y x} \cdot y) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log_y x^{\log_y x} + \log_y y = \frac{5}{2}\log_y x;\ \ \log_y^2 x - \frac{5}{2}\log_y x + 1 = 0.$$

Замена: $t = \log_y x$. Получим уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, корни: $t_1 = 2$; $t_2 = \frac{1}{2}$, тогда $\log_y x = 2$ и $x = y^2$, или $\log_y x = \frac{1}{2}$, тогда

$x = \sqrt{y}$, т. е. $y = x^2$.

Приведём второе уравнение к более простому виду: перейдём от логарифма по основанию y к логарифму по основанию 4:

$$\log_4 y \cdot \frac{\log_4 (y-3x)}{\log_4 y} = 1 \Rightarrow \log_4 (y-3x) = 1 \text{ и } y - 3x = 4.$$

Получаем совокупность двух систем: $\begin{cases} x = y^2; \\ y - 3x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2; \\ y - 3x = 4. \end{cases}$

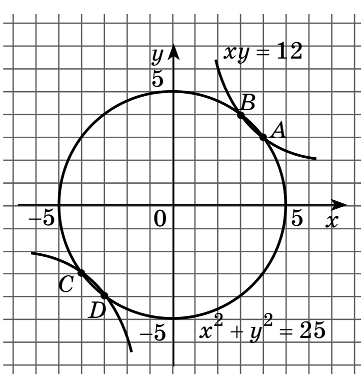
Первая система не имеет решений, вторая система имеет два решения: (4; 16); (–1; 1).

Проверка: решения системы должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x > 0; \\ y > 0; \\ y - 3x > 0; \\ y \neq 1. \end{cases}$$

Решение (4; 16) этой системе удовлетворяет, а (–1; 1) — нет.
Ответ: (4; 16).

Использование графиков при решении систем



Чтобы решить систему уравнений с двумя переменными графически, нужно построить графики уравнений системы в одной системе координат и найти координаты общих точек графиков.

Пример. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ xy = 12. \end{cases}$$

Решение. $x^2 + y^2 = 25$ — окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5.

$xy = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ — гипербола.

Графики уравнений пересеклись в точках $A(4; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-4; -3)$, $D(-3; -4)$.
Ответ: (4; 3); (3; 4); (–4; –3); (–3; –4).

Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические)

Пример 1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18; \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$ ОДЗ: $x > 0$; $y > 0$.

Решение. На ОДЗ первое уравнение равносильно: $(3^{\log_3 x})^{\log_3 y} + (3^{\log_3 y})^{\log_3 x} = 18$;
$3^{\log_3 y \cdot \log_3 x} + 3^{\log_3 x \cdot \log_3 y} = 18$; $2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18$; $3^{\log_3 x \log_3 y} = 9$; $\log_3 x \cdot \log_3 y = 2$.

Получим систему: $\begin{cases} \log_3 x \log_3 y = 2; \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Замена: $\log_3 x = t$; $\log_3 y = z$, тогда $\begin{cases} tz = 2; \\ t + z = 3, \end{cases}$ очевидно, что $\begin{cases} t = 2; \\ z = 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} t = 1; \\ z = 2. \end{cases}$

Обратная замена: $\begin{cases} \log_3 x = 1; \\ \log_3 y = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_3 x = 2; \\ \log_3 y = 1. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x = 3; \\ y = 9; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 9; \\ y = 3. \end{cases}$

Найденные решения входят в ОДЗ.
Ответ: (3; 9); (9; 3).

Пример 2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x - y > 0$.
$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 2^2 \cdot 3^5, \\ x - y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 3, \\ 3^x \cdot 2^{x-3} = 2^2 \cdot 3^5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 3, \\ 6^x = 6^5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$
Выполнив проверку, убедимся, что (5; 2) — решение данной системы.
Ответ: (5; 2).

Пример 3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$ Выполним замену: $\begin{cases} \sqrt{x} = u, \ u > 0, \\ \sqrt{y} = v, \ v > 0. \end{cases}$

Тогда
$\begin{cases} 2u - v = 4, \\ uv = 30, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} v = 2u - 4, \\ u(2u - 4) = 30, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} v = 2u - 4, \\ u^2 - 2u - 15 = 0, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = -3, \end{array} \right. \\ v = 2u - 4, \\ u > 0, \\ v > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} u = 5, \\ v = 6. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \sqrt{x} = 5, \\ \sqrt{y} = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 25, \\ y = 36. \end{cases}$

Выполнив проверку, убедимся, что (25; 36) — решение данной системы.
Ответ: (25; 36).

Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения

Однородные системы уравнений

Система двух уравнений с двумя переменными называется **однородной**, если левые части её уравнений, содержащие переменные, являются однородными многочленами степени n от двух переменных. Однородная система с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = a \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = b \end{cases}.$$

Однородные системы решаются с помощью методов алгебраического сложения и введения новых переменных.

Пример. Решите систему: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}.$

Решение. Умножим первое уравнение на 13: $13x^2 - 39xy + 13y^2 = -13$, и сложим со вторым: $16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0$. Разделив обе части полученного уравнения на 8, имеем: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.

Таким образом, получаем следующую систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Второе уравнение последней системы можем разделить на $x^2 \neq 0$ $(x \neq 0)$, так как если положить $x = 0$, то получим $y = 0$, а пара $(0; 0)$ не удовлетворяет первому уравнению последней системы.

$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 : x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$. Выполнив замену $\frac{y}{x} = t$, получим:

$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ или $\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Поэтому исходная система равносильна совокупности систем:

$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ y = 2x \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x = 2y \end{cases}.$

Первая система имеет решения: (1; 2), (–1; –2); вторая — (2; 1), (–2; –1).

Ответ: (1; 2); (–1; –2); (2; 1); (–2; –1).

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств:**

$x^2 - y^2 =$	$= x^p \cdot y^p$
$(x - y)^2 =$	$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
$x^3 + y^3 =$	$= 1 - \cos^2 x$
$(xy)^p =$	$= \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} =$	$= x^2 - 2xy + y^2$
$\sin^2 x =$	$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{tg} x =$	$= (x - y)(x + y)$
$1 + \operatorname{tg}^2 x =$	$= \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$
$\operatorname{ctg} x =$	$= \sqrt[mn]{x}$

Ответы на тестовые задания к неделе 12

1 — 34. **2** — 8. **3** — 1. **4** — 2. **5** — 10.

НЕДЕЛЯ 13

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.2. Неравенства
- 2.2.1. Квадратные неравенства
- 2.2.2. Рациональные неравенства
- 2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
- 2.2.9. Метод интервалов

НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Неравенством с одной переменной называется неравенство, содержащее одну независимую переменную. Пусть дано неравенство с одной переменной $f(x) > g(x)$ (вместо знака «$>$» могут быть знаки «$<$», «$\leqslant$» «$\geqslant$»). Областью определения неравенства $f(x) > g(x)$ называется пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Решением неравенства называется всякое значение переменной, при котором исходное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с переменной — значит найти все его решения или доказать, что их нет. Два неравенства с одной переменной называются **равносильными (эквивалентными)**, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если они не имеют решений.

При решении неравенств пользуются **основными теоремами о равносильности неравенств.**

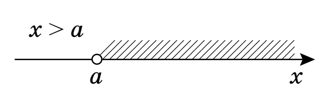
1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное исходному.
2. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить (или вычесть из них) любую функцию $\varphi(x)$, то получится неравенство, равносильное исходному, при условии что области определения полученного и исходного неравенств совпадают.
3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (или разделить) на любую функцию $\varphi(x)$, сохраняющую постоянный знак и отличную от нуля, то при $\varphi(x) > 0$ получится неравенство, равносильное исходному, а при $\varphi(x) < 0$ равносильным исходному будет неравенство противоположного смысла (предполагается, что области определения полученного и исходного неравенств совпадают).

Замечание. На практике при применении 2-й и 3-й теорем чаще всего вместо функции $\varphi(x)$ берётся её частный случай — константа, отличная от нуля.

Геометрическая интерпретация неравенств

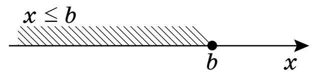
Решение неравенств можно показать геометрически на числовой оси. Так, если мы имеем строгое неравенство $x > a$, то геометрически множество его решений изображается в виде той части числовой прямой, которая лежит справа от точки с абсциссой $x = a$. При этом правее точки $x = a$ наносят штриховку, а саму точку $x = a$ обычно изображают в виде светлого кружка (говорят, что точку $x = a$ «выкалывают»):

$$x > a \Leftrightarrow x \in (a;\ \infty).$$



Если имеем нестрогое неравенство $x \leqslant b$, то на числовой оси наносят штриховку слева от точки $x = b$, при этом точку $x = b$ обычно закрашивают в чёрный цвет, т. е. изображают тёмной точкой:

$x \leqslant b \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ b]$.



При решении систем линейных неравенств, состоящих из двух неравенств, можно изображать решения с помощью двух числовых осей или с помощью одной оси, с помощью дуг или с помощью штриховок, нанося штриховки, имеющие разный угол наклона относительно числовой прямой, снизу и сверху или только сверху (снизу).

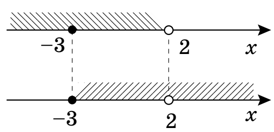
Пример. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2x-1<3; \\ 3x+2 \geq -7; \end{cases}$ используя геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 2x-1<3; \\ 3x+2 \geqslant -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<1+3; \\ 3x \geqslant -2-7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<4; \\ 3x \geqslant -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

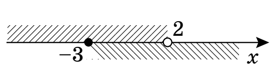
Приведём **четыре варианта геометрической интерпретации** примера.

1-й вариант (с использованием двух числовых осей). На одной числовой прямой отмечаем все те значения x, при которых выполняется первое неравенство системы, а на второй числовой прямой, расположенной под первой, — все те значения x, при которых выполняется второе неравенство системы. Сравнение этих двух результатов показывает, что оба неравенства одновременно будут выполняться при всех значениях x, заключённых от (–3) до (+2), т. е. $-3 \leqslant x < 2 \Leftrightarrow x \in [-3;\ 2)$.



2-й вариант (с использованием одной числовой оси и штриховок снизу и сверху оси). На числовую ось наносим штриховки, расположенные выше и ниже числовой прямой, и находим пересечение решений неравенств, образующих исходную систему.

$$\begin{cases} 2x-1<3; \\ 3x+2 \geqslant -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$



С помощью координатной прямой находим, что множеством решений исходной системы является полуинтервал $[-3;\ 2)$.

3-й вариант (с использованием одной оси, дуг и штриховок).

$$\begin{cases} 2x-1<3; \\ 3x+2 \geqslant -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ x \geqslant -3. \end{cases}$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Формула $m = 280 - 20n$ задаёт зависимость объёма спроса m (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены n. По формуле $t(n) = m \cdot n$ вычисляется выручка предприятия за месяц t (тыс. руб.). Определите наибольшую цену n, при которой месячная выручка $t(n)$ составляет не менее 800 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

____

2. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Катушка состоит из трёх однородных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиусом $R = 10$ см, двух боковых с массами $M = 4$ кг и с радиусами $R + h$.

При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в кг · см^2, определяется по формуле

$$I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения 4000 кг · см^2? Ответ выразите в сантиметрах.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

3. Зависимость объёма спроса t (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены h (тыс. руб.) задаётся формулой $t = 130 - 10h$. Выручка предприятия за месяц x (тыс. руб.) вычисляется по формуле $x(h) = t \cdot h$. Определите наибольшую цену x, при которой месячная выручка $x(h)$ составит не менее 360 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

____

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$2y(y + 6) + 10 + y \leq (2y + 3)^2 - y(2y - 1).$$

____

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(m + 7)^2 + 15 \geqslant (m - 2)^2.$$

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

На числовую ось наносим заданные множества $x < 2$ и $x \geqslant -3$ при помощи дуг и штриховок с разным углом наклона к координатной прямой. Искомое множество изображено двойной штриховкой при помощи наложения двух штриховок.

4-й вариант (с использованием одной оси и дуг).

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3 \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -3 \end{cases}.$$

На числовую ось наносим заданные множества $x < 2$ и $x \geqslant -3$ при помощи только одних дуг, а штриховку наносим только там, где заданные множества пересекаются.

Рациональные неравенства

Решение рациональных неравенств методом интервалов

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ $(P_n(x) < 0,$ $P_n(x) \geqslant 0,$ $P_n(x) \leqslant 0),$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0,\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geqslant 0,\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leqslant 0 \right),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m, т. е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

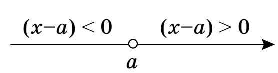
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0$$

обычно решают методом интервалов (методом промежутков). Этот метод удобен, например, для решения неравенств следующего вида:

$$x\ (x + 1) \geqslant 0,\ \frac{3x}{x-3} < 0,\ (x - 1)(x - 2)(x - 5) \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \geqslant 0,\quad \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x+1)(x+3)} < 0.$$

В основе метода интервалов лежит следующее свойство двучлена $(x - a)$: точка $x = a$ делит числовую ось на две части.



Пусть требуется решить неравенство $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) > 0$, где $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причём такие, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$. Для решения неравенства $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) > 0$ **методом интервалов** поступают следующим образом: на числовую ось наносят числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$; в промежутке справа от наибольшего из них, т. е. числа a_n, ставят знак «плюс», в следующем за ним справа налево интервале ставят знак «минус», затем — знак «плюс», далее знак «минус» и т. д.

Тогда множеством всех решений неравенства $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) > 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «плюс», а множеством решений неравенства $(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) < 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «минус».

Замечание 1. На практике среди двучленов встречаются выражения $(a_i - x)$, в этом случае справа от наибольшего числа $x = a_n$ уже не обязательно будет знак «плюс». Поэтому неравенства, где в левой части встречаются двучлены вида $(a_i - x)$, лучше всего решать так: найти знак левой части выражения в каком-то одном из интервалов, не обязательно крайнем справа, а дальше в соседних интервалах будут противоположные знаки.

Замечание 2. Изменение знаков левой части неравенства удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (которую называют «кривой знаков»), проведённой через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком неравенства в рассматриваемом промежутке.

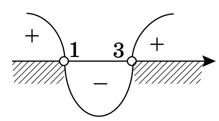
Замечание 3. Приведённые выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, где $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ \dots\ (x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ \dots\ (x-b_k)}.$$

При этом числа $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, ..., b_{k-1}, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $f(x)$ иллюстрируется с помощью «кривой знаков».

Пример. Решите неравенство: $(x - 1)(x - 3) > 0$.

Решение. Многочлен $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ обращается в нуль в точках $x = 1$, $x = 3$. Эти точки разбивают координатную прямую на промежутки $(-\infty; 1)$; $(1; 3)$; $(3; +\infty)$, внутри каждого из которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Так как в промежутке $(3; +\infty)$ сомножители $(x - 1)$, $(x - 3)$ положительные, то и их произведение положительно, т. е. $f(x) > 0$. Отметим промежуток $(3; +\infty)$ знаком «+». Далее знаки в промежутках чередуются. Проводим через отмеченные точки «кривую знаков».



Иллюстрацию с помощью «кривой знаков» понимаем так: на тех промежутках, где «кривая знаков» проходит выше координатной прямой (где ставится знак «+»), выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех промежутках, где кривая проходит ниже прямой (где знак «–»), выполняется неравенство $f(x) < 0$. В результате получаем, что решением исходного неравенства является объединение промежутков: $(-\infty; 1)$; $(3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Обобщенный метод интервалов

Пусть требуется решить неравенство:

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ \dots\ (x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n} > 0,$$

где $k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n$ — целые положительные числа; $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ — действительные числа, среди которых нет равных, и такие, что $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$. Неравенства подобного вида решают с применением **обобщённого метода интервалов**. В основе этого метода лежит следующее свойство двучлена $(x - a)^n$: точка $x = a$ делит числовую ось на две части, причём если $n = 2k$ (n — чётное), то выражение $(x - a)^n$ справа и слева от точки $x = a$ сохраняет положительный знак; если $n = 2k + 1$ (n — нечётное число), то выражение $(x - a)^n$ справа от точки $x = a$ положительное, а слева от точки $x = a$ отрицательное.

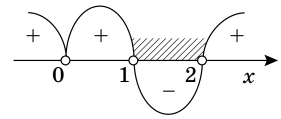
Для решения неравенства $(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ \dots\ (x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n} > 0$ обобщённым методом интервалов на числовую ось наносим числа $a_1,\ a_2, \dots,\ a_{n-1},\ a_n$. В промежутке справа от наибольшего из них ставим знак «+», а затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередное число a_1 меняем знак, если k_i — нечётное число, и сохраняем знак, если k_i — чётное число.

Замечание 1. Если встречаются выражения $(a_i - x)^n$, то справа от наибольшего из a_i не обязательно будет знак «+». В этом случае лучше всего определить знак левой части неравенства в каком-либо из интервалов, а затем поставить знаки в каждом из интервалов с учётом изложенных выше соображений.

Замечание 2. Приведённые выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$, где

$$\varphi(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ \dots\ (x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\ \dots\ (x-b_p)^{m_p}}.$$

Пример. Решите неравенство: $x^2(x-1)^3\,(x-2)^5 < 0$.



Решение. Отмечаем на числовой прямой точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Проводим через эти точки «кривую знаков» с учетом того что слева и справа от точки $x = 0$ один и тот же знак «+», так как в выражении $x^2 = 0$ показатель степени (число 2) — число чётное. В окрестности точек $x = 1$ и $x = 2$ знаки в соседних промежутках чередуются, так как в выражениях $(x-1)^3$ и $(x-2)^5$ показатели степеней (числа 3 и 5) нечётные. Множество, дающее решение исходного неравенства, на рисунке заштриховано. Это интервал (1; 2).

Метод замены переменной при решении рациональных неравенств

Многие неравенства удобно решать, применяя метод замены переменной (метод подстановки).

Пример. Решите неравенство: $(x^2-x)^2 - 8\,(x^2-x) + 12 < 0$.

Решение. Выполнив замену переменной $t = x^2 - x$, получаем $t^2 - 8t + 12 < 0$.

Корнями уравнения $t^2 - 8t + 12 = 0$ являются $t_1 = 2$, $t_2 = 6$. Отсюда $t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6) < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 6$.

Поскольку $t = x^2 - x$, получаем:

$$2 < x^2 - x < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > 2 & \text{(а)} \\ x^2 - x < 6 & \text{(б)} \end{cases}.$$

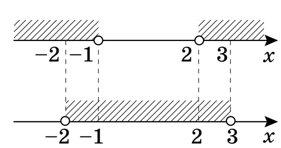
Решаем неравенство (а):

$$x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right..$$

Решаем неравенство (б):

$x^2 - x < 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Отсюда $(x^2-x)^2 - 8\,(x^2-x) + 12 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x > 2 \\ x^2 - x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ -2 < x < 3 \end{cases}$.



Изобразим полученные множества с помощью двух координатных прямых. Решением исходного неравенства является объединение множеств (–2; –1); (2; 3).

Ответ: $x \in (-2;\,-1) \cup (2;\,3)$.

Решение простейших неравенств

Линейные неравенства $ax>b$, $ax\geqslant b$, $ax<b$, $ax\leqslant b$

Неравенство	$a>0$	$a=0$			$a<0$
		$b>0$	$b=0$	$b<0$	
$ax>b$	$\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x\in R$	$\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$
$ax\geqslant b$	$\left[\frac{b}{a};+\infty\right)$	$\varnothing$	$x\in R$	$x\in R$	$\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$
$ax<b$	$\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$	$x\in R$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$
$ax\leqslant b$	$\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$	$x\in R$	$x\in R$	$\varnothing$	$\left[\frac{b}{a};+\infty\right)$

Неравенства $|x-b|>a$, $|x-b|<a$, $|x-b|\geqslant a$, $|x-b|\leqslant a$

Неравенство	$b=0$			$b\neq0$		
	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$\lvert x-b\rvert>a$	$x\in R$	$x<0,\ x>0$	$x<-a,\ x>a$	$x\in R$	$x<b,\ x>b$	$x<b-a,\ x>b+a$
$\lvert x-b\rvert<a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$-a<x<a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$b-a<x<b+a$
$\lvert x-b\rvert\geqslant a$	$x\in R$	$x\in R$	$x\leqslant -a,\ x\geqslant a$	$x\in R$	$x\in R$	$x\leqslant b-a,\ x\geqslant b+a$
$\lvert x-b\rvert\leqslant a$	$\varnothing$	$x=0$	$-a\leqslant x\leqslant a$	$\varnothing$	$x=b$	$b-a\leqslant x\leqslant b+a$

Неравенства $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant0$, $ax^2+bx+c\leqslant0$

Неравенство		$D<0$	$D=0$	$D>0$
$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$x\in R$	$x\neq x_0$	$(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$
	$a<0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$(x_1;\ x_2)$
$ax^2+bx+c\geqslant0$	$a>0$	$x\in R$	$x\in R$	$(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$
	$a<0$	$\varnothing$	$x=x_0$	$[x_1;\ x_2]$
$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$(x_1;\ x_2)$
	$a<0$	$x\in R$	$x\neq x_0$	$(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$
$ax^2+bx+c\leqslant0$	$a>0$	$\varnothing$	$x=x_0$	$[x_1;\ x_2]$
	$a<0$	$x\in R$	$x\in R$	$(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Неравенства $ax^k > b$, $ax^k < b$, $ax^k \geqslant b$, $ax^k \leqslant b$, $n \in N$

Неравенство	a	$k = 2n$			$k = 2n + 1$
		$b<0$	$b=0$	$b>0$	$b \in [-\infty; +\infty)$
$ax^{2n} > b$	$a>0$	$x \in R$	$x \neq 0$	$x < -\sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$, $x > \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x > \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
	$a<0$	$-\sqrt[2n]{\frac{b}{a}} < x < \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x < \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
$ax^{2n} \geqslant b$	$a>0$	$x \in R$	$x \in R$	$x \le -\sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$, $x \ge \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x \geqslant \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
	$a<0$	$-\sqrt[2n]{\frac{b}{a}} \leqslant x \leqslant \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x=0$	$\varnothing$	$x \leqslant \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
$ax^{2n} < b$	$a>0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$-\sqrt[2n]{\frac{b}{a}} < x < \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x < \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
	$a<0$	$x < -\sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$, $x > \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x \neq 0$	$x \in R$	$x > \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
$ax^{2n} \leqslant b$	$a>0$	$\varnothing$	$x=0$	$-\sqrt[2n]{\frac{b}{a}} \leqslant x \leqslant \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x \leqslant \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$
	$a<0$	$x \leqslant -\sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$, $x \geqslant \sqrt[2n]{\frac{b}{a}}$	$x \in R$	$x \in R$	$x \geqslant \sqrt[2n+1]{\frac{b}{a}}$

Неравенства $\sqrt[k]{x} > a$, $\sqrt[k]{x} < a$, $\sqrt[k]{x} \geqslant a$, $\sqrt[k]{x} \leqslant a$, $n \in N$

Неравенство	$k = 2n$			$k = 2n + 1$
	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$b \in [-\infty; +\infty)$
$\sqrt[2n]{x} > a$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(a^{2n}; +\infty)$	$x > a^{2n+1}$
$\sqrt[2n]{x} \geqslant a$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[a^{2n}; +\infty)$	$x \geqslant a^{2n+1}$
$\sqrt[2n]{x} < a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$[0; a^{2n})$	$x < a^{2n+1}$
$\sqrt[2n]{x} \leqslant a$	$\varnothing$	$x=0$	$[0; a^{2n}]$	$x \leqslant a^{2n+1}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Неравенства $\frac{k}{x^{2n}} > a,\ \frac{k}{x^{2n}} < a,\ \frac{k}{x^{2n}} \geqslant a,\ \frac{k}{x^{2n}} \leqslant a,\ n \in N$

Неравенства		$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\frac{k}{x^{2n}} > a$	$k>0$	$\left(-\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right)$	$x\neq 0$	$x\neq 0$
	$k<0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left(-\infty;\ -\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right)\cup\left(\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$
$\frac{k}{x^{2n}} < a$	$k>0$	$\left(-\infty;\ -\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right)\cup\left(\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$k<0$	$x\neq 0$	$x\neq 0$	$\left(-\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right)$
$\frac{k}{x^{2n}} \geqslant a$	$k>0$	$\left[-\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right]$	$x\neq 0$	$x\neq 0$
	$k<0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left(-\infty;\ -\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right]\cup\left[\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$
$\frac{k}{x^{2n}} \leqslant a$	$k>0$	$\left(-\infty;\ -\sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right]\cup\left[\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$k<0$	$x\neq 0$	$x\neq 0$	$\left[-\sqrt[2n]{\frac{k}{a}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \sqrt[2n]{\frac{k}{a}}\right]$

Неравенства $\frac{k}{x^{2n+1}} > a,\ \frac{k}{x^{2n+1}} < a,\ \frac{k}{x^{2n+1}} \geqslant a,\ \frac{k}{x^{2n+1}} \leqslant a,\ n \in N$

Неравенства		$a<0$	$a=0$	$a>0$
$\frac{k}{x^{2n+1}} > a$	$k>0$	$\left(-\infty;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right)\cup(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	$\left(0;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right)$
	$k<0$	$(-\infty;\ 0)\cup\left(\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$\left(\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ 0\right)$
$\frac{k}{x^{2n+1}} < a$	$k>0$	$\left(\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ 0\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$(-\infty;\ 0)\cup\left(\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$
	$k<0$	$\left(0;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right)$	$(0;\ +\infty)$	$\left(-\infty;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right)\cup(0;\ +\infty)$
$\frac{k}{x^{2n+1}} \geqslant a$	$k>0$	$\left(-\infty;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right]\cup(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	$\left(0;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right]$
	$k<0$	$(-\infty;\ 0)\cup\left[\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$\left[\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ 0\right)$
$\frac{k}{x^{2n+1}} \leqslant a$	$k>0$	$\left[\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ 0\right)$	$(-\infty;\ 0)$	$(-\infty;\ 0)\cup\left[\sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}};\ +\infty\right)$
	$k<0$	$\left(0;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right]$	$(0;\ +\infty)$	$\left(-\infty;\ \sqrt[2n+1]{\frac{k}{a}}\right]\cup(0;\ +\infty)$

Неравенства $x^r > a$, $x^r < a$, $x^r \geqslant a$, $x^r \leqslant a$
(r — положительная несократимая дробь)

Неравенство	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$x^r > a$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$\left(a^{\frac{1}{r}}; +\infty\right)$
$x^r \geqslant a$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$\left[a^{\frac{1}{r}}; +\infty\right)$
$x^r < a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left[0; a^{\frac{1}{r}}\right)$
$x^r \leqslant a$	$\varnothing$	$x=0$	$\left[0; a^{\frac{1}{r}}\right]$

Неравенства $x^{-r} < a$, $x^{-r} > a$, $x^{-r} \leqslant a$, $x^{-r} \geqslant a$
(r — положительная несократимая дробь)

Неравенство	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$x^{-r} > a$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$\left(0; a^{-\frac{1}{r}}\right)$
$x^{-r} \geqslant a$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$\left(0; a^{-\frac{1}{r}}\right]$
$x^{-r} < a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left(a^{-\frac{1}{r}}; +\infty\right)$
$x^{-r} \leqslant a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\left[a^{-\frac{1}{r}}; +\infty\right)$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Запишите решения неравенств с помощью таблиц на с. 123–126:**

а) $5x \geqslant 2$

б) $|x-3| \leqslant 2$

в) $x^2 + 4x - 5 < 8$

г) $3x^7 \geqslant 2$

д) $5x^{12} < 3$

е) $2\sqrt[3]{5x} \geqslant 1$

ж) $\sqrt{2x} < 4$

з) $\dfrac{48}{x^4} \geqslant 3$

и) $\dfrac{64}{x^6} < 1$

к) $x^{\frac{3}{4}} \geqslant 3$

л) $x^{-\frac{5}{3}} < -2$

Ответы на тестовые задания к неделе 13

1 — 10. **2** — 20. **3** — 9. **4** — ∅. **5** — –3.

НЕДЕЛЯ 14

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.2. Неравенства
- 2.2.3. Показательные неравенства
- 2.2.4. Логарифмические неравенства
- 2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
- 2.2.9. Метод интервалов

Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

Решение простейших неравенств $a^x > b$, $a^x < b$, $a^x \geqslant b$, $a^x \leqslant b$

	$b \leqslant 0$	$b > 0$	
		$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x < b$	$\varnothing$	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
$a^x \leqslant b$	$\varnothing$	$x \leqslant \log_a b$	$x \geqslant \log_a b$
$a^x > b$	$x \in R$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x \geqslant b$	$x \in R$	$x \geqslant \log_a b$	$x \leqslant \log_a b$

Неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a > 0$

Необходимо рассмотреть два случая:

а) $b \leqslant 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow x \in D(f)$;

б) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$; $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

Пример. Решите неравенство: $2^x > 5$.

Решение. $2^x > 5 \Leftrightarrow 2^x > 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x > \log_2 5$.

Ответ: $x \in (\log_2 5; +\infty)$.

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

- если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;
- если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Коротко можно записать:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}; \begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Заметим, что, применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «⩾», «⩽». В частности, можно, например, записать: $a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$.

Пример. Решите неравенство: $2^x < \frac{1}{8}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то

$$2^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-3} \Leftrightarrow x < -3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{\varphi(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x) \log_a b, \text{ если } a > 1;$$
$$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x) \log_a b, \text{ если } 0 < a < 1.$$

Пример. Решите неравенство: $2^x \geqslant 3^{x^2}$.

Решение. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2.

Тогда имеем:

$$2^x \geqslant 3^{x^2} \Leftrightarrow \log_2(2^x) \geqslant \log_2(3^{x^2}) \Leftrightarrow x \geqslant x^2 \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 \log_2 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x(1 - x \log_2 3) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_3 2].$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$.

Решение показательных неравенств методом замены переменной

Пример. Решите неравенство: $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$.

Решение. Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда исходное неравенство равносильно такому:

$$t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 9 \Leftrightarrow 3 < 3^x < 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^1 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

Пример. Решите неравенство: $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Решение. Исходное неравенство можно записать в виде: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$.

В левой части — однородные функции относительно 2^x и 5^x. Тогда можно разделить обе части исходного

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Укажите наибольшее целое решение неравенства $5^{4-7x} \geqslant 0{,}2^{10}$.

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(0{,}2)^{9x^2-4x-4} > (0{,}2)^{2x-5}.$$

Если такого нет, то в ответе запишите «1».

3. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$3^{2x+1} > 3^x + 2.$$

4. Решите неравенство

$$3^{x+1} + 3^{x-1} \geqslant 21 + 3^x.$$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Решите неравенство
$\log_2 x + \log_2(x - 1) \le 1$.

6. Решите неравенство
$\log_{0,25}(2x - 4) \geqslant \log_{0,25}(x + 1)$.

7. Решите неравенство $\log_3(x - 2) < 2$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

неравенства на 2^{2x}, 5^{2x} или на $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > 2 \end{array}\right.$.

Поскольку $t > 0$, имеем $t > 2$, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.

Логарифмические неравенства

Логарифмическими называются неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических неравенств нахождение области определения исходного неравенства не является обязательным, а часто даже нецелесообразно, поскольку условия, задающие область определения неравенства, обычно подключают к тому неравенству, которое является следствием заданного логарифмического неравенства.

Решение простейших неравенств $\log_a x < b$, $\log_a x > b$, $\log_a x \leqslant b$, $\log_a x \geqslant b$

Неравенство	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x < b$	$\begin{cases} x < a^b, \\ x > 0 \end{cases}$	$x > a^b$
$\log_a x > b$	$x > a^b$	$\begin{cases} x < a^b, \\ x > 0 \end{cases}$
$\log_a x \leqslant b$	$\begin{cases} x \leqslant a^b, \\ x > 0 \end{cases}$	$x \geqslant a^b$
$\log_a x \geqslant b$	$x \geqslant a^b$	$\begin{cases} x \leqslant a^b, \\ x > 0 \end{cases}$

Пример. Решите неравенство: $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant 0$.

Решение. Решение исходного неравенства лучше всего записать с использованием цепочек эквивалентных неравенств:

$$\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant \log_2 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant \log_3 3 \Leftrightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leqslant x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{8} \leqslant x < \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left[1\frac{1}{8};\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Неравенства, решаемые с использованием свойств логарифмов

Решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ основано на том, что функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) является убывающей при $0 < a < 1$ и возрастающей при $a > 1$.

Таким образом, имеем следующие утверждения:

$$\text{а) } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}.$$

Заметим, что в неравенствах (а) и (б) можно использовать как первую (более полную) систему неравенств, так и вторую (укороченную) систему неравенств, ей равносильную. Достоинством более полной системы неравенств является её наглядность и очевидность, а достоинством укороченной — меньшая трудоёмкость, т. к. приходится решать на одно неравенство меньше. Однако переход от более полной системы к укороченной не всегда очевиден для малоопытного решающего.

Неравенство	**$a>0$, $a\neq 1$**	**Решение**	**Пример**
$\log_a f(x) < b$	$a>1$	$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\log_5(4x-7) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-7 < 5, \\ 4x-7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
	$0<a<1$	$f(x) > a^b$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 12, \\ 4x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(1\frac{3}{4};\ 3\right)$
$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$a>1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\log_7(x-1) < \log_7(8-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 8-2x, \\ x-1 > 0 \end{cases}$
	$0<a<1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 9, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;\ 3)$

Неравенство	$a>0$, $a\neq 1$	Решение	Пример
$\log_a f(x)>b$,	$a>1$	$f(x)>a^b$	$\log_{0,2}(x-3)\geqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\leqslant 0,2^1, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3,2, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3;\ 3,2]$
$\log_a f(x)>b$,	$0<a<1$	$\begin{cases} f(x)<a^b, \\ f(x)>0 \end{cases}$	
$\log_{h(x)} f(x)<c$		$\begin{cases} h(x)>1, \\ f(x)>0, \\ f(x)<\left[h(x)\right]^c. \end{cases}$ $\begin{cases} h(x)>0, \\ h(x)<1, \\ f(x)>0, \\ f(x)<\left[h(x)\right]^c \end{cases}$	$\log_x(2x-1)>1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0, \\ x>1, \\ 2x-1>x^1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x<1, \\ x>0, \\ 2x-1<x^1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;+\infty)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Пример. Решите неравенство: $\log_{0,2}(x^2)>\log_{0,2}(3x)$.
Решение. Учитывая что основание логарифмов $0<0,2<1$, получаем:

$$\log_{0,2}\left(x^2\right)>\log_{0,2}(3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>0 \\ 3x>0 \\ x^2<3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x(x-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<3.$$

Ответ: $x\in(0;\ 3)$.

Логарифмические неравенства, решаемые с использованием замены переменной

Пример. Решите неравенство: $\log_3^2 x-2\log_3 x-3\leqslant 0$.
Решение. Обозначив $\log_3 x=t$, приходим к неравенству:

$$t^2-2t-3\leqslant 0,\ -1\leqslant t\leqslant 3 \Leftrightarrow -1\leqslant \log_3 x\leqslant 3 \Leftrightarrow \log_3 3^{-1}\leqslant \log_3 x\leqslant \log_3 3^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 27.$$

Ответ: $x\in\left[\dfrac{1}{3};27\right]$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините соответствующие части равенств:**

$\log_a(xy) =$	$= n\log_a x$
$\log_a \dfrac{x}{y} =$	$= b$
$\log_a x^n =$	$= \dfrac{1}{k}\log_a x$
$\log_{a^k} x =$	$= \log_a x - \log_a y$
$\log_a x =$	$= \dfrac{1}{\log_b a}$
$a^{\log_a b} =$	$= \log_a x + \log_a y$
$\log_a b =$	$= \log_{a^k} b^k$
$\log_a b =$	$= \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

♦ **Запишите решения неравенств с помощью таблиц на с. 128 и 130:**

а) $a^{5x} \geqslant 3$ ____________________

б) $e^{3x} < 2$ ____________________

в) $\log_2 x \leqslant 2$ ____________________

г) $\lg x > 3$ ____________________

Ответы на тестовые задания к неделе 14

1 — 2. **2** — 1. **3** — 1. **4** — $x \geqslant 2$. **5** — (1; 2]. **6** — (2; 5]. **7** — (2; 11).

НЕДЕЛЯ 15

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

2.2. Неравенства
- 2.2.5. Системы линейных неравенств
- 2.2.6. Системы неравенств с одной переменной
- 2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств

СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача отыскать все те значения переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств.

Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

Очевидно, что решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют систему неравенства, то их записывают в столбик с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

Так, например, запись $\begin{cases} 3x + 5 > 2, \\ 4x - 5 \leqslant 15 \end{cases}$ означает, что неравенства $3x + 5 > 2$ и $4x - 5 \leqslant 15$ образуют систему неравенств.

Двойное неравенство $g(x) < f(x) < \varphi(x)$ эквивалентно (равносильно) системе неравенств, т. е.

$$g(x) < f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}.$$

Например, $\begin{cases} x + 1 \leqslant -5, \\ x + 1 \geqslant -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leqslant x + 1 \leqslant 5.$

Пример. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x^2} \geqslant 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (1 - x)(1 + x) \geqslant 0, \\ x \neq 0, \\ x > -1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in [-1;\ 1], \\ x \neq 0, \\ x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-1;\ 1], \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1].$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

СОВОКУПНОСТЬ НЕРАВЕНСТВ

Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача отыскать все те значения переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют *совокупность неравенств*, то их записывают либо в столбик с помощью *квадратной скобки*, либо в строку с помощью союза *или*, например:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x) \text{ или } f_2(x) > g_2(x).$$

Несколько систем неравенств с одной переменной образуют совокупность систем неравенств, если ставится задача отыскать все те значения переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одной из этих систем.

Пример. Решите неравенство:

$$\frac{x^2-4}{\log_{0,5}(x^2-1)} < 0.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1>0, \\ \log_{0,5}(x^2-1) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2>1, \\ x^2-1 \neq 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ x^2 \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| > 1, \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$x \in (-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty).$$

$$\frac{x^2-4}{\log_{0,5}(x^2-1)} < 0; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4>0, \\ \log_{0,5}(x^2-1)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0, \\ \log_{0,5}(x^2-1)>0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4>0, \\ x^2-1>1; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0, \\ x^2-1<1; \end{cases} \end{array}\right.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x+3}{3} \geqslant 1 - \dfrac{x+1}{6}; \\ 3(x+1) - 2(x-2) \geqslant 3x+3. \end{cases}$$

В ответ запишите произведение всех целых решений системы.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x-2| > |x+3|; \\ x+3 > 0. \end{cases}$$

В ответ запишите наименьшее целое её решение.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}2(2x+1)-3(x-2)\leqslant 5x-4,\\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x-2}{5}\leqslant 2-\dfrac{5x+1}{15}.\end{cases}$$

В ответ запишите произведение всех её целых решений.

____

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}x^2-16\leqslant 0;\\ x^2+3x>0.\end{cases}$$

В ответ запишите сумму всех целых решений системы.

____

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}x^2-25\leqslant 0;\\ x(x+4)>0.\end{cases}$$

В ответ запишите сумму всех целых её решений.

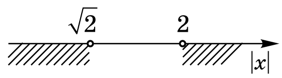
____

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(x-5a)(x-a-5)<0$ выполняется при всех значениях x, удовлетворяющих условию $1\leqslant x\leqslant 5$.

____

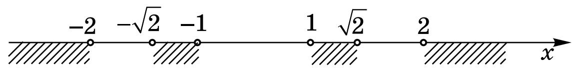
ДЛЯ ЗАМЕТОК

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>4,\\ x^2>2;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2<4,\\ x^2<2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2>4,\\ x^2<2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}|x|>2,\\ |x|<\sqrt{2};\end{array}\right.$$



$x\in(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(2;\ +\infty).$

Учитывая область определения, получаем:



$x\in(-\infty;\ -2)\cup(-\sqrt{2};\ -1)\cup(1;\ \sqrt{2})\cup(2;\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(-\sqrt{2};\ -1)\cup(1;\ \sqrt{2})\cup(2;\ +\infty).$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Изобразите на числовой оси решения неравенств:**

а) $x > -3$

$x \geqslant -3$

$x < -3$

$x \leqslant -3$

б) $x^2 + 4x + 3 > 0$

$x^2 + 4x + 3 \geqslant 0$

$x^2 + 4x + 3 < 0$

$x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$

в) $x^3 > 8$

$x^3 \geqslant 8$

$x^3 < 8$

$x^3 \leqslant 8$

г) $|x| > 2$

$|x| \geqslant 2$

$|x| < 2$

$|x| \leqslant 2$

д) $x^4 > 1$

$x^4 \geqslant 1$

$x^4 < 1$

$x^4 \leqslant 1$

е) $\dfrac{81}{x^4} > 1$

$\dfrac{81}{x^4} \geqslant 1$

$\dfrac{81}{x^4} < 1$

$\dfrac{81}{x^4} \leqslant 1$

Ответы на тестовые задания к неделе 15

1 — 2. **2** — –2. **3** — 12. **4** — 6. **5** — 10. **6** — 0 < *a* <0,2.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое является решением неравенства

$$(3^x - 9)(x^2 - 2x - 8) > 0.$$

2. Решите уравнение $(1 - \sin x)\ \mathrm{tg}\ x = 0$.

3. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$$(x - a)\log_2(3x - 7) = 0$$

имеет только один корень.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + a \sin^2 2x = 0{,}5$.

5. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$.

6. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x}{4}+2} = \sqrt{\dfrac{x}{4}-3} + a$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 **15** 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

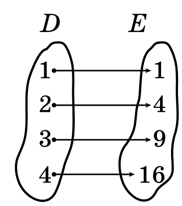
НЕДЕЛЯ 16

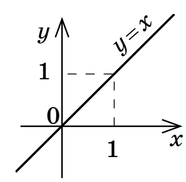
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

3.1. Определение и график функции
- 3.1.1. Функция, область определения функции
- 3.1.2. Множество значений функции
- 3.1.3. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
- 3.1.4. Обратная функция. График обратной функции
- 3.1.5. Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

ФУНКЦИИ

ФУНКЦИИ





Числовая функция с областью определения D — это зависимость, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное число y: $y=f(x)$.

График функции $y=f(x)$ — это множество точек координатной плоскости с координатами (x, y), где x пробегает всю область определения функции $f(x)$, а y — соответствующее значение функции.

Областью определения $D(f)$ называют множество значений, которые может принимать x.

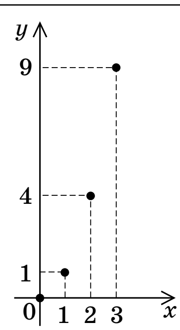
Областью значений $E(f)$ называют множество значений $f(x)$, которые она может принимать при $x \in D(f)$.

Для того чтобы найти $E(f)$, необходимо найти все значения a, для которых $f(x)=a$ имеет единственное решение.

Способы задания функций

<table>
<tr><th>Табличный</th><th>Графический</th><th>Аналитический</th></tr>
<tr><td>

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

</td><td>
</td><td>$y=x^2$,
где $x \in [1;\ 2;\ 3;\ 4]$</td></tr>
</table>

Область определения функции, заданной формулой

Областью определения функции, заданной формулой $y=f(x)$, называют множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, указанные формулой, можно выполнить).

Функция	$D(f)$
$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$	R
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены	$g(x)\neq 0$
$y=\sqrt[2n]{f(x)}$, где $n\in\mathrm{N}$	$f(x)\geqslant 0$
$y=\dfrac{1}{f(x)}$	$f(x)\neq 0$
$y=\log_a f(x)$, $a>0$, $a\neq 1$	$f(x)>0$
$y=\log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)>0 \end{cases}$
$y=\mathrm{tg} f(x)$	$f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathrm{Z}$
$y=\mathrm{ctg}\ f(x)$	$f(x)\neq \pi n,\ n\in\mathrm{Z}$
$y=\arcsin f(x)$	$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$
$y=\arccos f(x)$	$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$
$y=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathrm{N}$	$x\in\mathrm{R}$
$y=x^{\alpha}$, α — целое отрицательное или 0	$x\neq 0$
$y=x^{\alpha}$, $\alpha>0$, α — не целое	$x\geqslant 0$
$y=x^{\alpha}$, $\alpha<0$, α — не целое	$x>0$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$. В ответ запишите количество целых чисел из промежутка $[-3;3]$ области определения.

____

2. При каких значениях аргумента x_1 и x_2 значение функции $y=x^2+6x-2$ равно 5? В ответ запишите произведение $x_1\cdot x_2$.

____

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}.$$

____

4. Найдите множество значений функции $y=|x|+3$. В ответ запишите наименьшее положительное число из множества значений.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Найдите $g(2)$, если $g(x)$ — функция, обратная к функции $y=\dfrac{1}{1-x}$.

____

6. Найдите $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{5}\right)$.

____

7. Найдите $g(3)$, если $g(x)$ — обратная функция к $y=2x-5$.

____

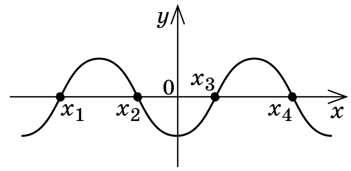
8. Укажите параллельный перенос графика функции $y=(x+3)^2+5$, полученного из графика $y=x^2$, на m единиц вдоль оси x и n единиц вдоль оси y. В ответ запишите $m+n$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Нули функции

Нулями (корнями) функции называют значения аргумента, при которых значения функции равны нулю.



x_1, x_2, x_3, x_4 — нули функции.

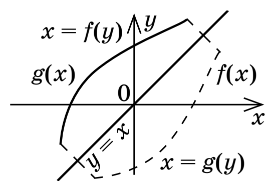
Для того чтобы найти нули функции, необходимо решить уравнение $f(x)=0$.

Взаимно обратные функции

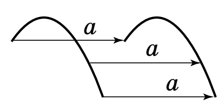
Функцию g называют *обратной для функции f,* если каждому y из области значений функции f функция g ставит в соответствие одно значение x из области определения функции f, такое, что $y=f(x)$. Следовательно, если $y=f(x)$, то $x=g(y)$.

Функции f и g называют *взаимно обратными*.

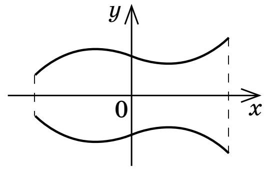
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.



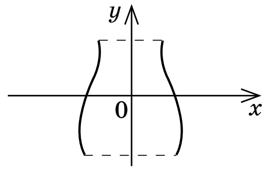
Геометрические преобразования графиков функций



Параллельное перемещение



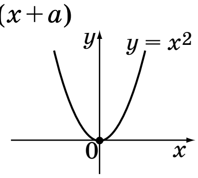
Симметрия относительно оси Ox



Симметрия относительно оси Oy

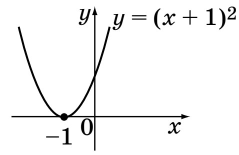
<table>
<tr><th>Вид функции</th><th>Преобразование</th></tr>
<tr><td>

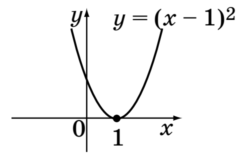
$y=f(x+a)$



</td><td>

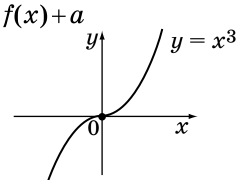
График функции $y=f(x)$ перенести на вектор $(-a;\ 0)$.





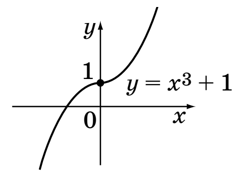
</td></tr>
<tr><td>

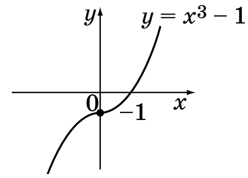
$y=f(x)+a$



</td><td>

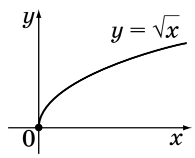
График функции $y=f(x)$ перенести на вектор $(0;\ a)$.





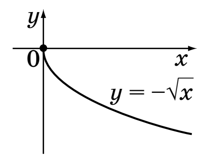
</td></tr>
<tr><td>

$y=-f(x)$



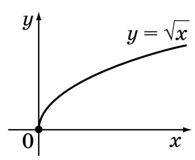
</td><td>

График функции $y=f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ox.



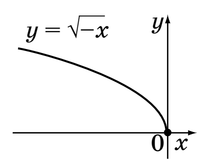
</td></tr>
<tr><td>

$y=f(-x)$



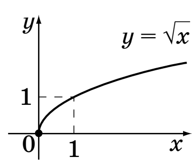
</td><td>

График функции $y=f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Oy.



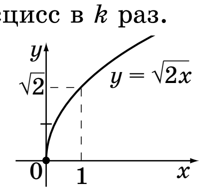
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

$y=f(kx)$, $k>0$



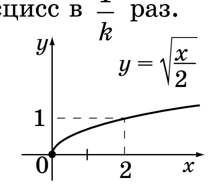
</td><td>

Если $k>1$, то сжать график функции $y=f(x)$ до точки $O\ (0;\ 0)$ вдоль оси абсцисс в k раз.

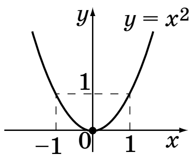
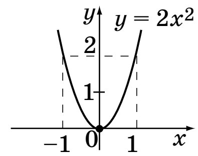
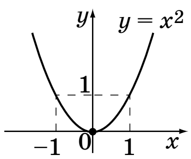
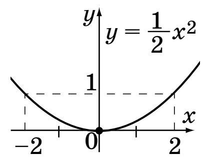
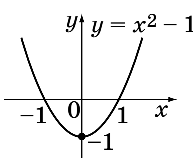
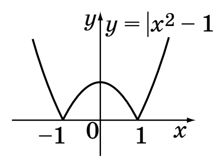
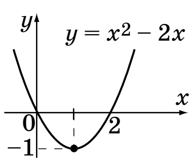
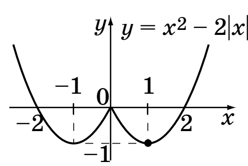
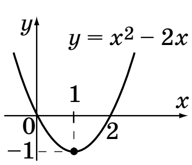
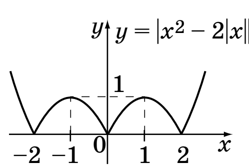


</td></tr>
<tr><td>

Если $0<k<1$, то растянуть график функции $y=f(x)$ от точки $O\ (0;\ 0)$ вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.



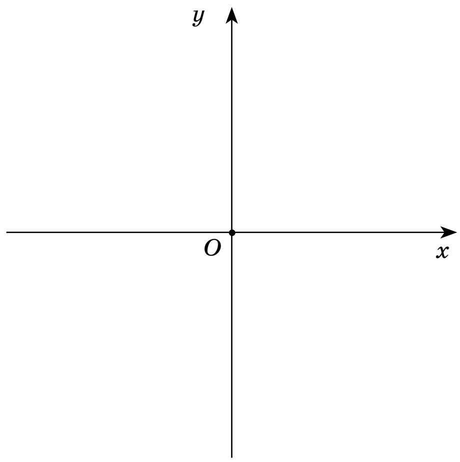
</td></tr>
</table>

Вид функции	Преобразование
$y=kf(x)$, $k>0$ 	Если $k>1$, то растянуть график функции $y=f(x)$ от точки O (0; 0) вдоль оси ординат в k раз. 
	Если $0<k<1$, то сжать график функции $y=f(x)$ от точки O (0; 0) вдоль оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз. 
$y=\lvert f(x)\rvert$ 	Часть графика функции $y=f(x)$ в верхней полуплоскости и на оси Ox оставить без изменений, а вместо части графика в нижней полуплоскости построить её симметричное отображение относительно оси Ox. 
$y=f(\lvert x\rvert)$ 	Часть графика функции $y=f(x)$ в правой полуплоскости и на оси ординат оставить без изменений, а вместо части в левой полуплоскости построить симметричную правой части относительно оси Oy. 
$y=\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$ 	Использовать последовательно построение графиков функций $y=f(\lvert x\rvert)$ и $y=\lvert f(x)\rvert$. 

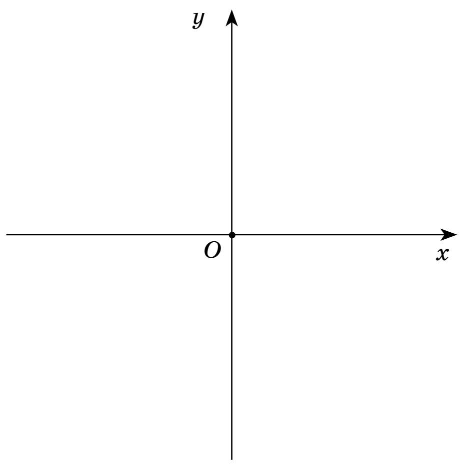
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Схематически изобразите графики функций:**

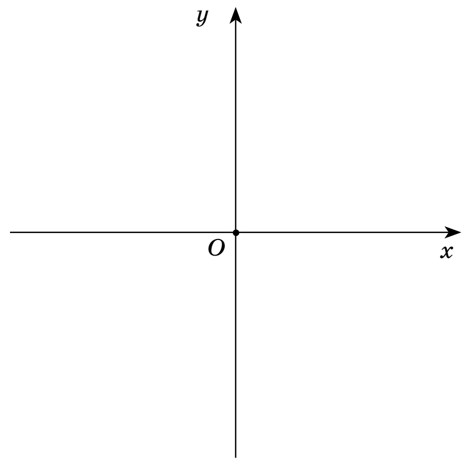
а) $y = 5x + 3$



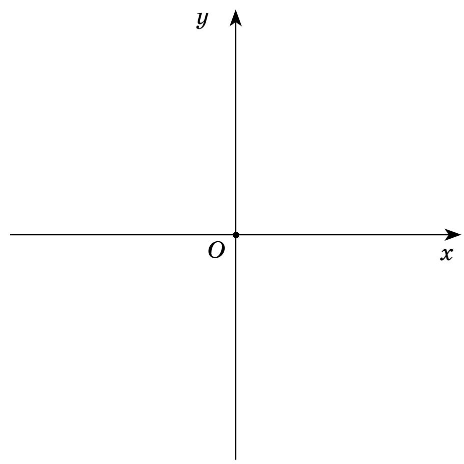
б) $y = (3x - 2)^2$



в) $y = \sin 2x$



г) $y = \left|\lg x\right|$



Ответы на тестовые задания к неделе 16

1 — 5. **2** — –7. **3** — 5. **4** — 3. **5** — 0,5. **6** — 0,2. **7** — 4. **8** — 2.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 **16** 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 17

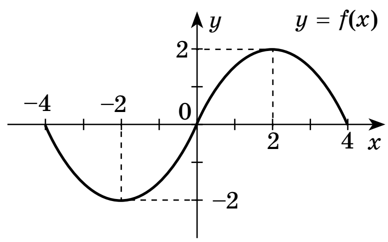
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

3.2. Элементарное исследование функций

- 3.2.1. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
- 3.2.2. Чётность и нечётность функции
- 3.2.3. Периодичность функции
- 3.2.4. Ограниченность функции
- 3.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции
- 3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции

Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ непрерывна тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$, т. е. существует $f(a)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

3) предел функции в точке a равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, таких, что $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Иными словами, при незначительном изменении аргумента значение функции также изменяется незначительно.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то её называют непрерывной на данном промежутке. Справедлива теорема:

Если $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными в точке $x = a$, то в этой точке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Исходя из этого, можно утверждать:

а) многочлен $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ — непрерывная функция в любой точке;

б) дробно-рациональная функция $y = \dfrac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ непрерывна в любой точке числовой оси, кроме тех точек, в которых знаменатель равен нулю;

в) функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = |x|$ непрерывны во всех точках области определения.

Пример. Исследуйте на непрерывность функцию:

$$y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}.$$

Решение. Данная функция существует всюду, кроме $x = \pm 1$. Функции $y = \cos x$, $y = x^2 - 1$ непрерывны в каждой точке числовой прямой, и функция $y = x^2 - 1$ всюду отлична от нуля, кроме $x = \pm 1$. Поэтому по теореме о непрерывности частного данная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой, кроме точек $x = \pm 1$, следовательно, она непрерывна на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: функция непрерывна, если $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x - T)$ и $(x + T)$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$. Число T в этом случае называется периодом функции $f(x)$.

Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, так как если T — период функции $y = f(x)$, то и число вида kT — период функции ($k \in Z$, $x \neq 0$). На практике, говоря о периоде, нередко имеют в виду наименьший положительный период (если таковой существует).

Пример. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\right) + 3$; б) $y = \sin(3x - 1) - 1$.

Решение.

а) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$; б) $T = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) 4π; б) $\frac{2\pi}{3}$.

Чётность (нечётность) функции

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Функцию $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ представьте в виде $f(x) = g(x) + p(x)$, где $g(x)$ — чётная функция, $p(x)$ — нечётная.
В ответ запишите значение выражения $g(-1) + 2p(2)$.

____

2. Найдите $\text{ctg}(-585°)$, пользуясь периодичностью, чётностью или нечётностью функции.

____

3. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \text{tg}\,2\pi x$.

____

4. Пользуясь периодичностью, чётностью или нечётностью функции, найдите $\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Определите точку максимума функции $y=-2x^2+8x-9$.

6. Найдите наибольшее значение функции $y=\cos 2x-\cos x$.

7. Определите стороны a и b прямоугольника с периметром 20 см, имеющего наибольшую площадь. В ответ запишите $a \cdot b$.

8. Найдите наименьшее значение функции $y=\cos 2x+\cos x$.

9. При каком значении x функция $y=2x^2-4x+6$ принимает наименьшее значение?

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, то функция называется **функцией общего вида.**

Из определения чётных и нечётных функций следует, что область определения $D(f)$ как чётной, так и нечётной функции симметрична относительно начала координат, т. е. если $x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

Если функция $y = f(x)$ является чётной, то её график симметричен относительно оси ординат. Если функция $y = f(x)$ является нечётной, то её график симметричен относительно начала координат.

Пример. Исследуйте функции на чётность (нечётность):

а) $y = \sin x + x$; б) $y = x^2 \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x + x^2$.

Решение.

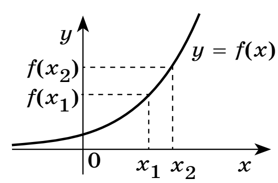
а) Поскольку $y(-x) = \sin(-x) - x = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -y(x)$, то $y = \sin x + x$ — нечётная функция.

б) Поскольку $y(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = y(x)$ то $y = x^2\cos x$ — чётная функция.

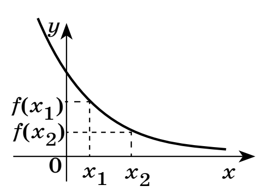
в) Поскольку $y(-x) = \operatorname{tg}(-x) + (-x)^2 = -\operatorname{tg} x + x^2 \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция $y = \operatorname{tg} x + x^2$ — функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).

Возрастание (убывание) функции

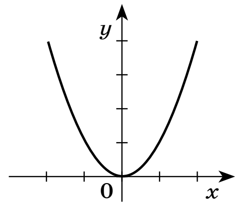
Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на данном числовом промежутке X, если бо́льшему значению аргумента соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.



Функция $y = f(x)$ называется убывающей на данном числовом промежутке X, если бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.



Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.
Функция $y = x^2$ не является монотонной на всей области определения, если при $x \in (-\infty; 0]$ она является убывающей, а при $x \in [0; +\infty)$ является возрастающей.



Экстремумы функции

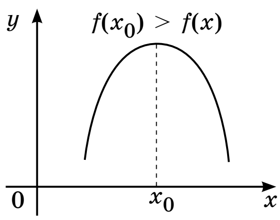
Точка $x = x_0$ — **точка максимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство:

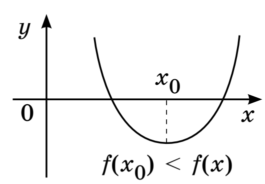
$$f(x_0) > f(x).$$

Точка $x = x_0$ — **точка минимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0), выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x).$$

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — **точки экстремума** (от латинского слова *extremum* — «крайний»).





x_0 — точка максимума →	точки экстремума	← x_0 — точка минимума
$f(x_0)$ — максимум функции →	экстремумы функции	← $f(x_0)$ — минимум функции

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке $(x_0 - \delta; x_0]$ и убывает (возрастает) на некотором промежутке $[x_0; x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$.

Пример. Найдите точки экстремумов и экстремумы функции: $y = x^4 - 2x^2$.

Решение. Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$.

Функция возрастает на каждом из промежутков $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$.

Таким образом, точки $x = -1$, $x = 1$ являются точками минимума, а точка $x = 0$ — точкой максимума. Соответствующие им экстремальные значения равны -1; 1 и 0.

Ответ: точки экстремумов -1, 0, 1; экстремумы функции -1, 0, 1.

Наибольшее (наименьшее) значение функции

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке [ab] функции $y = f(x)$, имеющей конечное число максимумов (минимумов), нужно вычислить значение функции в каждой точке максимума (минимума) и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее).

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ принято обозначать через $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$, а наименьшее — через $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
а) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, если $x \in [0;\ 3]$; б)$f(x) = 2x - x^2 + 2$, если $x \in [0;\ 3]$.
Решение.

а) Функция $f(x) = x^2 - 4x + 6$ имеет точку минимума $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2.$

Поскольку $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 4 + 6 = 2$, $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$, $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 =$
$= 15 - 12 = 3$, то $\max\limits_{x\in[0;\,3]} f(x) = f(0) = 6$, $\min\limits_{x\in[0;\,3]} f(x) = f(2) = 2.$

б) Функция $f(x) = 2x - x^2 + 2$ имеет точку максимума $x_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Поскольку $f(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 3$, $f(0) = 2 \cdot 0 - 0^2 + 2 = 2$, $f(3) = 2 \cdot 3 - 3^2 + 2 = 8 - 9 = -1$, то $\max\limits_{x\in[0;\,3]} f(x) = f(1) = 3$, $\min\limits_{x\in[0;\,3]} f(x) = f(3) = -1.$

Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на всей области определения $D(f)$, если существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C$ для каждой точки $x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если её область значений ограничена, т. е. если все её значения лежат на каком-нибудь конечном промежутке. В противном случае функцию называют неограниченной.

Функция, ограниченная на множестве $X \subset D\ (f)$, может быть неограниченной на всей области определения. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ ограничена при $x \in \left[\dfrac{1}{10}; 10\right]$, но на всей области определения она является неограниченной.

Ограниченность тригонометрической функции

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ **ограничены** на всей области определения: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ **не являются ограниченными** на всей области определения.

Пример. Докажите, что функция $y = 3 \cos 3x + 4 \sin 3x$ ограничена.
Решение. Так как при каждом $x \in \mathrm{R}$ справедливы неравенства:
$3 \cos 3x + 4 \sin 3x \leqslant 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$; $3 \cos 3x + 4 \sin 3x \geqslant 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = -7$,
то функция $5 \cos 3x + 2 \sin 3x$ ограничена.
Оценки очень грубые, значений 7 и –7 данная функция не достигает.
Можно предложить более точные оценки:

$$3\cos 3x + 4\sin 3x = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cos 3x + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \sin 3x \right) =$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}\sin 3x + \frac{4}{5}\sin 3x\right) = 5(\sin\alpha\cos 3x + \cos\alpha\sin 3x) = 5\sin(\alpha + 3x).$$

Так как $-5 \leqslant 5\sin(\alpha + 3x) \leqslant 5$, то $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

Сохранение знака функции

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются промежутками знакопостоянства функции.

Например, для функции $y = x$, $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.

Ясно, что значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox; эти точки называют нулями функции.

Для нахождения промежутков, на которых функция положительная (отрицательная), достаточно решить неравенство: $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Пример. Найдите промежутки знакопостоянства функции: $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Пусть $\frac{x}{2} = t$, тогда $y = \operatorname{tg} t$ и по свойствам функции $y = \operatorname{tg} t$ имеем:

а) $y > 0$, если $\pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, тогда $\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, отсюда

$2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) $y < 0$, если $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \pi n$, $n \in Z$, тогда $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} < \pi n$, $n \in Z$, отсюда

$-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$.

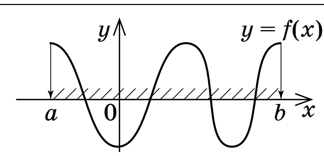
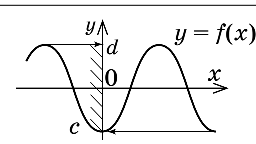
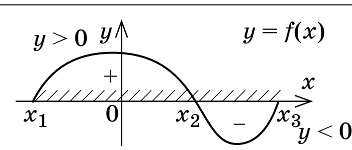
Ответ: $y > 0$, если $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $y < 0$, если $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in Z$.

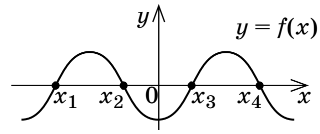
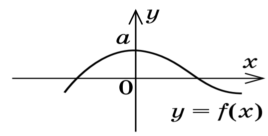
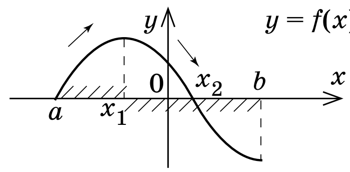
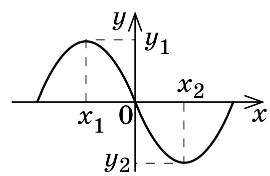
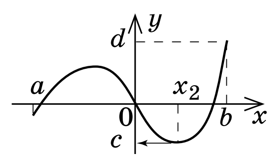
Сложная функция

Если y является функцией от u: $y = f(u)$, где u, в свою очередь, является функцией от аргумента x, то есть $u = g(x)$, то y называют сложной функцией от x.

$$y = f(g(x))$$

Чтение графика функции

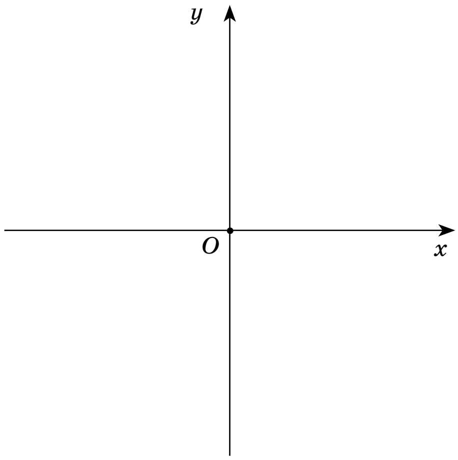
Этап	График
Область определения: $D(f) = [a; b]$	
Область значений: $E(f) = [c; d]$	
Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$, если $x \in (x_2; x_3)$	

Этап	График
Нули функции: x_1, x_2, x_3, x_4	
Ордината точки пересечения графика с осью Oy: $y=a$	
Промежутки монотонности: $y \uparrow$, если $x \in [a;\ x_1]$; $y \downarrow$, если $x \in [x_1;\ b]$	
Точки максимума и минимума (максимум и минимум функции): x_1 — точка максимума, x_2 — точка минимума, y_1 — максимум, y_2 — минимум	
Наибольшее и наименьшее значение функции: $\max\limits_{[ab]} f(x)=f(b)=d$, $\min\limits_{[ab]} f(x)=f(x_2)=c$	

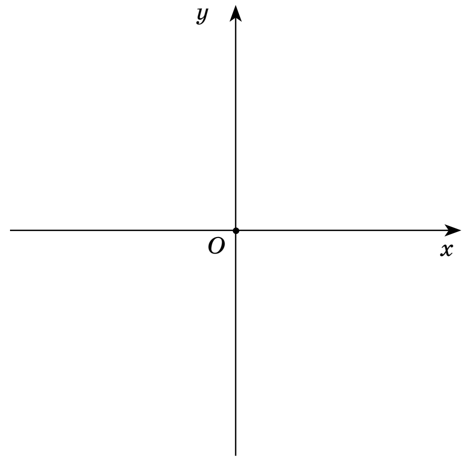
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Схематически изобразите:**

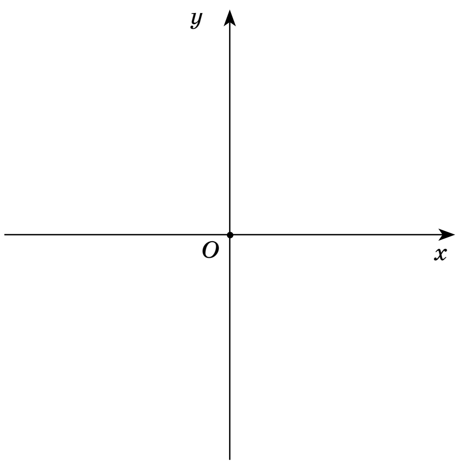
а) возрастающую функцию



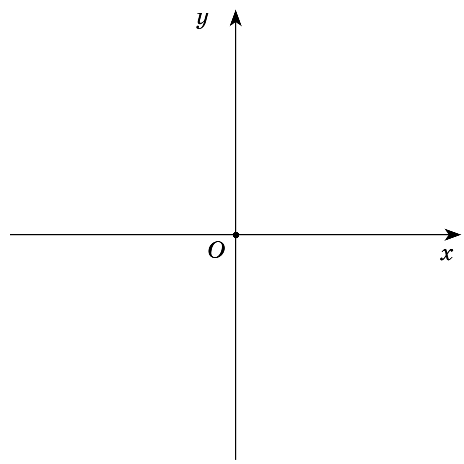
в) убывающую функцию



б) максимум функции



г) минимум функции



Ответы на тестовые задания к неделе 17

1 — 16. **2** — –1. **3** — 0,5. **4** — –1. **5** — 2. **6** — 2. **7** — 25. **8** — –1,125. **9** — 1.

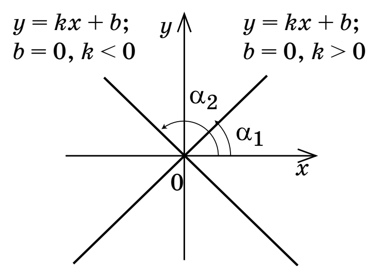
НЕДЕЛЯ 18

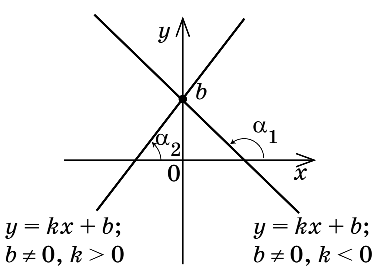
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

3.3. Основные элементарные функции
- 3.3.1. Линейная функция, её график
- 3.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график
- 3.3.3. Квадратичная функция, её график
- 3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем, её график

ОБЗОР ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ

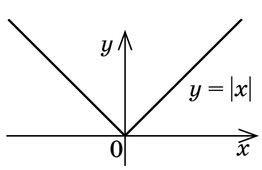
Линейная функция $y=kx+b$, $k \in R$, $b \in R$





1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=R$, если $k\neq0$; $E(y)=\{b\}$, если $k=0$.
3. Если $k\neq0$, $b\neq0$, то функция ни чётная, ни нечётная; если $k=0$, $b\neq0$, то функция чётная; если $b=0$, $k\neq0$, то функция нечётная; если $k=0$, $b=0$, то функция и чётная, и нечётная.
4. Если $k>0$, то функция возрастает; если $k<0$, то функция убывает; если $k=0$, то функция постоянная.
5. $k=\operatorname{tg}\alpha$, α — угол наклона прямой $y=kx+b$ к оси Ox (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки).

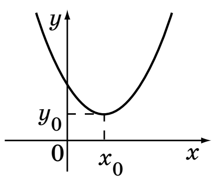
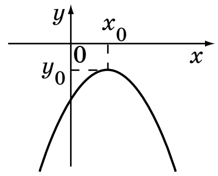
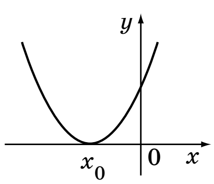
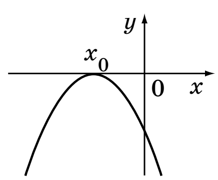
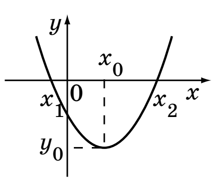
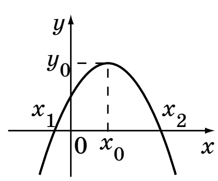
Функция $y=|x|$



1. $D(|x|)=R$.
2. $E(|x|)=[0;\ +\infty)$.
3. Функция чётная: $|-x|=|x|$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства $y>0$ для $x\in R/\{0\}$.
6. Промежутки монотонности:
   функция возрастает при $x\in[0;\ +\infty)$;
   функция убывает при $x\in(-\infty;\ 0]$.
7. Экстремумы:
   $y_{\min}=y(0)=0$

Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=[y_0;\ +\infty)$, если $a>0$, $E(y)=(-\infty;\ y_0]$, если $a<0$, где $y_0=ax_0^2+bx_0+c,\quad x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
3. Если $b=0$, то функция чётная; если $b\neq 0$, то функция ни чётная, ни нечётная.
4. Если $a>0$, то функция возрастает при $x\in[x_0;\ +\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;\ x_0]$;
   если $a<0$, то функция возрастает при $x\in(-\infty;\ x_0]$, убывает при $x\in[x_0;\ +\infty)$, где $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
5. $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ — точка минимума, если $a>0$; $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ — точка максимума, если $a<0$.

<table>
<tr><th></th><th>$a>0$</th><th>$a<0$</th></tr>
<tr><td>$D<0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$D=0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$D>0$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Функция $y=ax^{2n},\ n\in N$

1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=[0;\ +\infty)$, если $a>0$, $E(y)=(-\infty;\ 0]$, если $a<0$.
3. Функция чётная: $a\,(-x)^{2n}=ax^{2n}$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства:
   $ax^{2n}\geqslant 0$ для $x\in R$, если $a>0$;
   $ax^{2n}\leqslant 0$ для $x\in R$, если $a<0$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Определите абсциссу точки пересечения графика $y=-\dfrac{5}{x+1}-2$ с осью Ox.

____

2. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объём V (литров) газа вычисляется по формуле $V=\dfrac{6}{p}$, где p — давление (в атмосферах). Найдите объём, занимаемый газом при давлении 12 атм.

____

3. Определите ординату точки пересечения графика $y=-\dfrac{5}{x+1}-2$ с осью ординат.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Найдите ординату вершины параболы $y = x^2 + 4x + 1$.

____

5. Найдите ординату точки пересечения параболы $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ с осью *Oy*.

____

6. Пользуясь графиком функции $y = x^{12}$, выясните, сколько решений имеет уравнение $x^{12} = 3$.

____

7. Функция задана формулой $f(x) = 2x^3$. Вычислите значение разности

$$f(2) - 3f(1).$$

____

8. Функция задана формулой

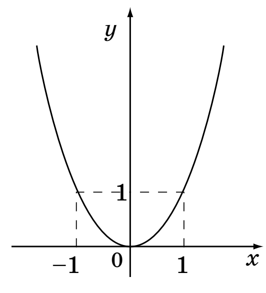
$$f(x) = (x+1)^3 - 8.$$

Не выполняя построения графика, найдите абсциссу точки пересечения графика с осью *Ox*.

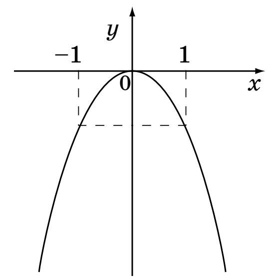
____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

6. Промежутки монотонности: если $a>0$, то функция убывает для $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает для $x \in [0; +\infty)$; если $a<0$, то функция возрастает для $x \in (-\infty; 0]$ и убывает для $x \in [0; +\infty)$.
7. Экстремумы:
если $a>0$, то $x=0$ — точка минимума;
если $a<0$, то $x=0$ — точка максимума.



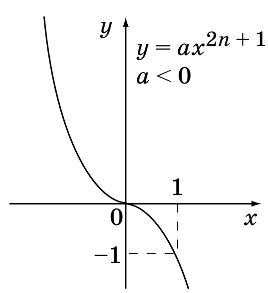
$y = ax^{2n}$, $a>0$



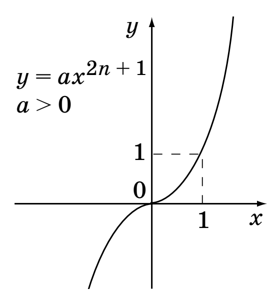
$y = ax^{2n}$, $a<0$

Функция $y = ax^{2n+1}$, $n \in N$

1. $D(y) = R$.
2. $E(y) = R$.
3. Функция нечётная: $a\,(-x)^{2n+1} = -ax^{2n+1}$.
4. Ноль функции: $x = 0$.
5. Промежутки знакопостоянства: если $a>0$, то $y<0$ для $x \in (-\infty; 0)$ и $y>0$ для $x \in (0; +\infty)$; если $a<0$, то $y<0$ для $x \in (0; +\infty)$ и $y>0$ для $x \in (-\infty; 0)$.
6. Промежутки монотонности: если $a>0$, то функция возрастает для $x \in R$; если $a<0$, то функция убывает для $x \in R$.
7. Экстремумов нет.



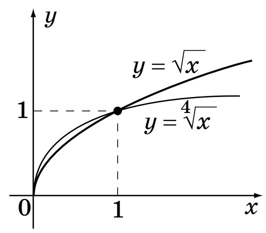
$a<0$



$a>0$

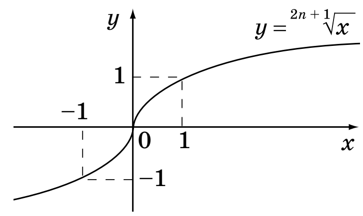
Функции $y=\sqrt[2n]{x}$, $n \in N$

1. $D(y)=[0;\ +\infty)$.
2. $E(y)=[0;\ +\infty)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $y>0$ для $x \in (0;\ +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: функция возрастает для $x \in [0;\ +\infty)$.
7. Экстремумов нет.



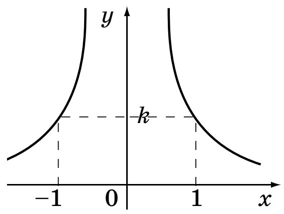
Функция $y=\sqrt[2n+1]{x}$, $n \in N$

1. $D(y)=R$.
2. $E(y)=R$.
3. Функция нечётная $\sqrt[2n+1]{-x}=-\sqrt[2n+1]{x}$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $y>0$ для $x \in (0;\ +\infty)$; $y<0$ для $x \in (-\infty;\ 0)$.
6. Промежутки монотонности: функция возрастает для $x \in R$.
7. Экстремумов нет.

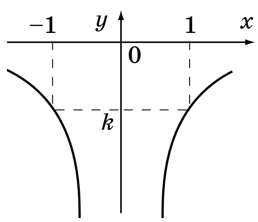


Функция $y=\dfrac{k}{x^{2n}}$, $n \in N$

1. $D(y): x \neq 0$.
2. $E(y)=(0;\ +\infty)$, если $k>0$, $E(y)=(-\infty;\ 0)$, если $k<0$.
3. Функция чётная: $\dfrac{k}{(-x)^{2n}}=\dfrac{k}{x^{2n}}$.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: если $k>0$, то $y>0$ для $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; если $k<0$, то $y<0$ для $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: если $k>0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty;\ 0)$ и убывает при $x \in (0;\ +\infty)$; если $k<0$, то функция убывает при $x \in (-\infty;\ 0)$ и возрастает при $x \in (0;\ +\infty)$.
7. Экстремумов нет.



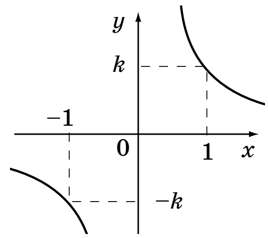
$k>0$



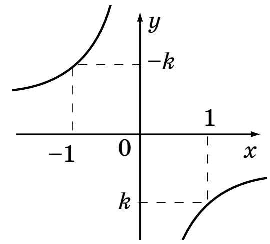
$k<0$

Функция $y=\dfrac{k}{x^{2n+1}}$, $n \in N$

1. $D(y)$: $x \neq 0$.
2. $E(y)$: $y \neq 0$.
3. Функция нечётная: $\dfrac{k}{(-x)^{2n+1}}=-\dfrac{k}{x^{2n+1}}$.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: если $k>0$, то $y<0$ для $x \in (-\infty;\ 0)$ и $y>0$ для $x \in (0;\ +\infty)$; если $k<0$, то $y<0$ для $x \in (0;\ +\infty)$ и $y>0$ для $x \in (-\infty;\ 0)$.
6. Промежутки монотонности: если $k>0$, то функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; если $k<0$, то функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$.
7. Экстремумов нет.

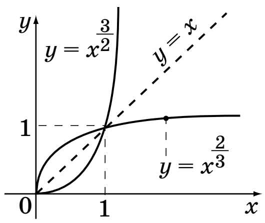


$k>0$



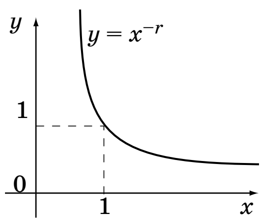
$k<0$

Функция $y = x^r$ (r — положительная несократимая дробь)



1. $D(y) = [0;\ +\infty)$.
2. $E(y) = [0;\ +\infty)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Ноль функции: $x = 0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ для $x \in (0;\ +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: функция возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.

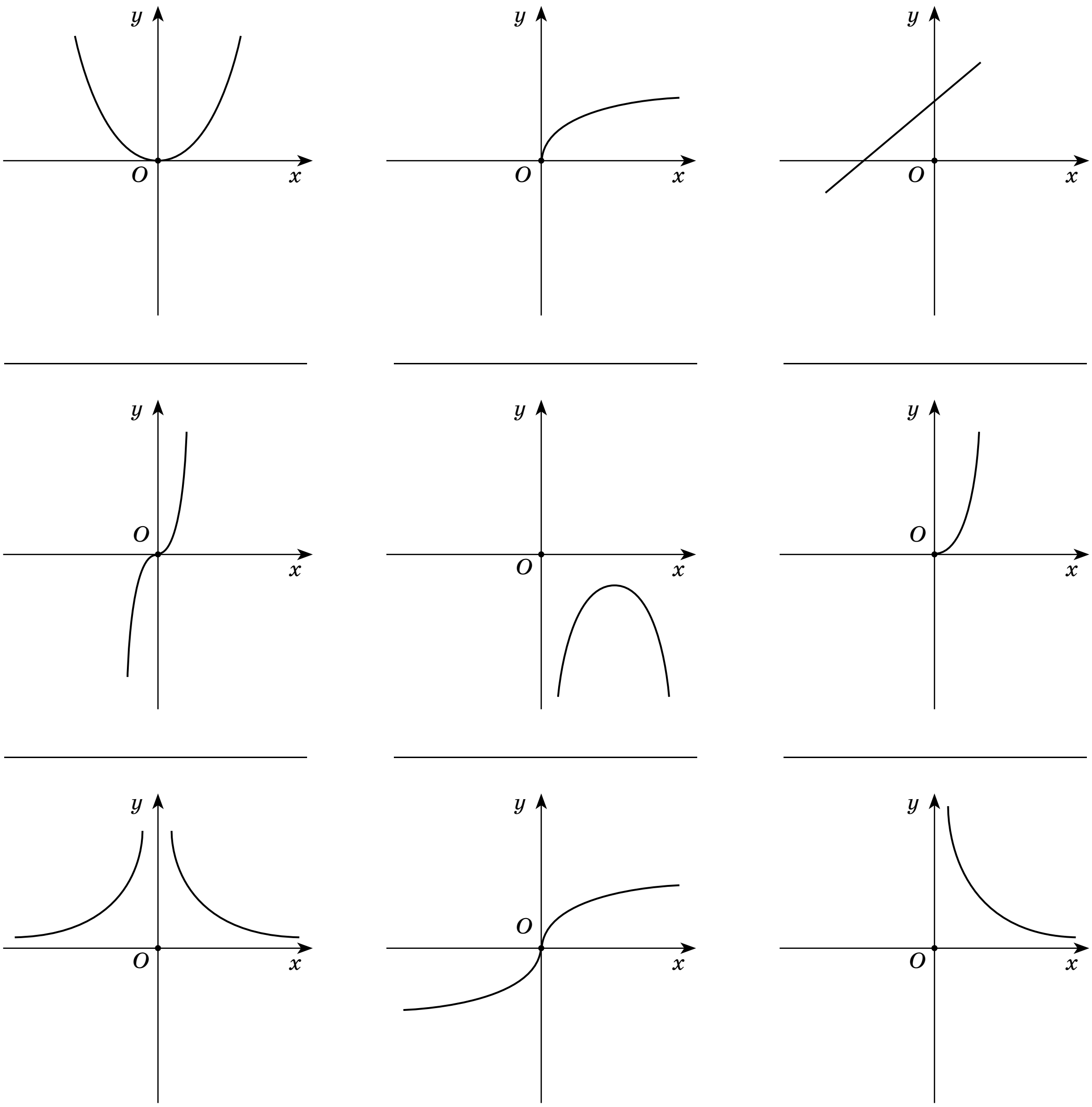
Функция $y = x^{-r}$ (r — положительная несократимая дробь)



1. $D(y) = (0;\ +\infty)$.
2. $E(y) = (0;\ +\infty)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ для $x \in (0;\ +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: функция убывает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Подпишите графики функций:**



Ответы на тестовые задания к неделе 18

1 — –3,5. **2** — 0,5. **3** — –7. **4** — –3. **5** — –3. **6** — 2. **7** — 10. **8** — 1.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 **18** 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

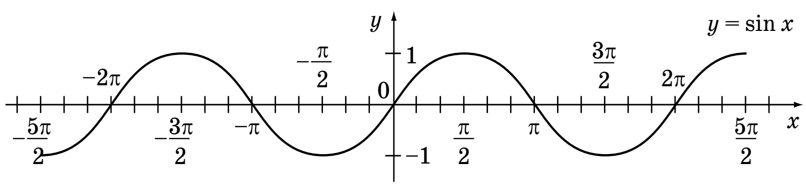
НЕДЕЛЯ 19

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

3.3. Основные элементарные функции
- 3.3.5. Тригонометрические функции, их графики
- 3.3.6. Показательная функция, её график
- 3.3.7. Логарифмическая функция, её график

Функция $y = \sin x$

1. $D(\sin x) = R$.
2. $E(\sin x) = [-1; 1]$.
3. Функция нечётная: $\sin(-x) = \sin x$.
4. Функция периодическая, с наименьшим положительным периодом 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. Нули функции: $x = \pi n$, $n \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства: $\sin x > 0$, если $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$; $\sin x < 0$, если $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$.
7. Промежутки монотонности: функция возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; функция убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.
8. Экстремумы: $y_{\max} = 1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $y_{\min} = -1$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

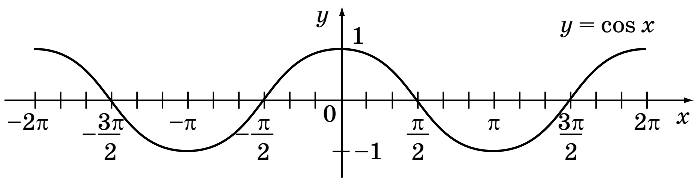


Функция $y = \cos x$

1. $D(\cos x) = R$.
2. $E(\cos x) = [-1; 1]$.
3. Функция чётная: $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция периодическая, с наименьшим положительным периодом 2π: $\cos(x + 2\pi) = \sin x$.
5. Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

   $\cos x > 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$, $\cos x < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

7. Промежутки монотонности: функция возрастает на каждом из промежутков $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, $n\in Z$; функция убывает на каждом из промежутков $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$.
8. Экстремумы: $y_{\max}=1$, если $x=2\pi n$, $n\in Z$; $y_{\min}=-1$, если $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

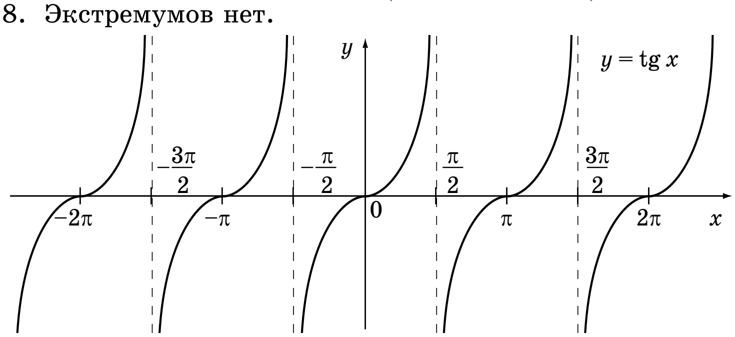


Функция *y* = tg *x*

1. $D(\operatorname{tg} x)$: $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.
2. $E(\operatorname{tg} x)=R$.
3. Функция нечётная: $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$.
4. Функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π: $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$.
5. Нули функции: $x=\pi n$, $n\in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

   $\operatorname{tg} x>0$, если $x\in\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$;

   $\operatorname{tg} x<0$, если $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in Z$.
7. Промежутки монотонности: функция возрастает на каждом из промежутков $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$.
8. Экстремумов нет.



Функция *y* = ctg *x*

1. $D(\operatorname{ctg} x): x\neq\pi n,\ n\in Z$.
2. $E(\operatorname{ctg} x)=R$.
3. Функция нечётная: $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$.
4. Функция периодическая, с наименьшим положительным периодом π: $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Определите наименьшее значение функции $y=2\sin 3x-1$.

____

2. Определите наименьший положительный период функции

$$y=3\operatorname{tg}(2\pi x)+1.$$

____

3. Найдите ординату точки пересечения графика $y=7^x-3$ с осью *Oy*.

____

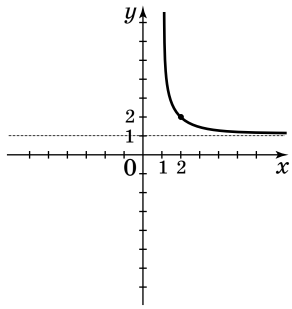
4. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-16$ с осью *Ox*.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. На рисунке изображён график функции $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}+b$. Найдите a и b, в ответ запишите $a \cdot b$.

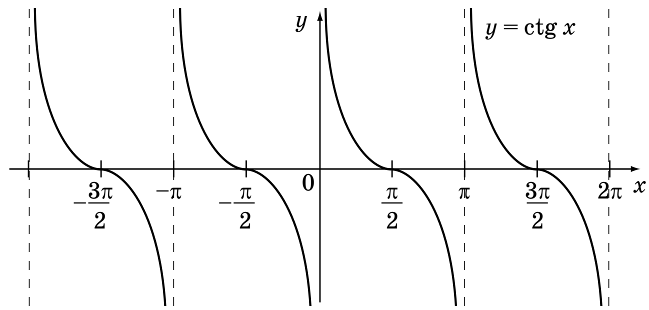


6. Найдите абсциссы точек пересечения графика $y=\log_{\pi}\left(x^2+2x-2\right)$ с осью Ox.
В ответ запишите x_1+x_2.

7. Найдите $f(3)$, если $f(x)=\log_3 \log_3 x$.

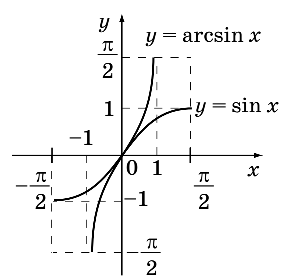
ДЛЯ ЗАМЕТОК

5. Нули функции: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:
   $\operatorname{ctg} x>0$, если $x\in\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$;
   $\operatorname{ctg} x<0$, если $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right),\ n\in Z$.
7. Промежутки монотонности: функция убывает на каждом из промежутков $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$.
8. Экстремумов нет.



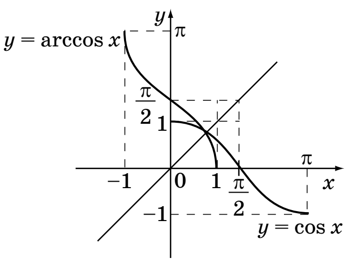
Функция $y=\arcsin x$

1. $D(\arcsin x)=[-1;\ 1]$.
2. $E(\sin x)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечётная: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.
4. Ноль функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $\arcsin x>0$, если $x\in(0;\ 1)$; $\arcsin x<0$, если $x\in(-1;\ 0)$.
6. Промежутки монотонности: функция возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. $y_{\max}=y(1)=\frac{\pi}{2}$; $y_{\min}=y(-1)=-\frac{\pi}{2}$.



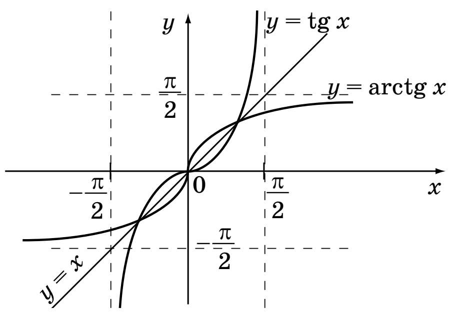
НЕДЕЛЯ 19. Функции

Функция *y* = arccos *x*



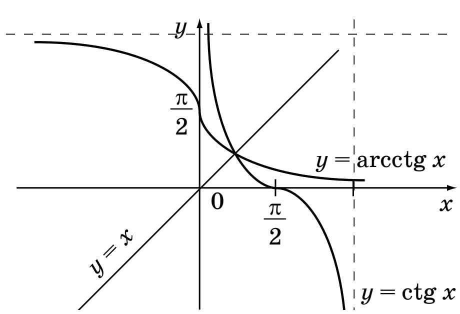
1. $D(\arccos x) = [-1;\ 1]$.
2. $E(\cos x) = [0;\ \pi]$
3. Функция ни чётная, ни нечётная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
4. Ноль функции: $x = 1$.
5. Промежутки знакопостоянства: $\arccos x > 0$, если $x \in [-1;\ 1)$.
6. Промежутки монотонности: функция убывает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.
8. $y_{\max} = y(-1) = \pi$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

Функция *y* = arctg *x*



1. $D(\operatorname{arctg} x) = R$.
2. $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. Ноль функции: $x = 0$.
5. Промежутки знакопостоянства: $\operatorname{arctg} x > 0$, если $x \in (0;\ +\infty)$; $\operatorname{arctg} x < 0$, если $x \in (-\infty;\ 0)$.
6. Промежутки монотонности: функция возрастает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.

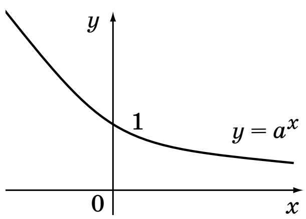
Функция *y* = arcctg *x*



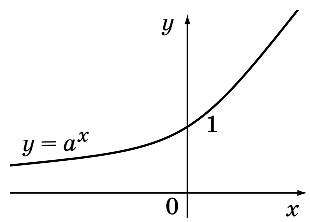
1. $D(\operatorname{arcctg} x) = R$.
2. $E(\operatorname{arcctg} x) = (0;\ \pi)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: $\operatorname{arcctg} x > 0$, если $x \in R$.
6. Промежутки монотонности: функция убывает на всей области определения.
7. Экстремумов нет.

Показательная функция $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)

1. $D(a^x)=R$.
2. $E(a^x)=(0;\ +\infty)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Нулей функция не имеет.
5. Промежутки знакопостоянства: $a^x>0$ для $x\in R$.
6. Промежутки монотонности: если $a>1$, то функция возрастает при $x\in R$; если $0<a<1$, то функция убывает при $x\in R$.
7. Экстремумов нет.



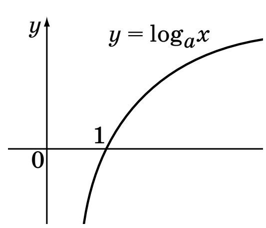
$0<a<1$



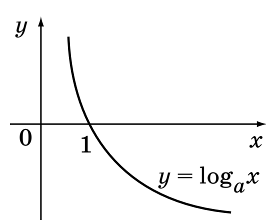
$a>1$

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)

1. $D(\log_a x)=(0;\ +\infty)$.
2. $E(\log_a x)=R$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Ноль функции: $x=1$.
5. Промежутки знакопостоянства: если $a>1$, то $y>0$ при $x\in(1;\ +\infty)$, $y<0$ при $x\in(0;\ 1)$; если $0<a<1$, то $y>0$ при $x\in(0;\ 1)$, $y<0$ при $(1;\ +\infty)$.
6. Промежутки монотонности: если $a>1$, то функция возрастает при $x\in(0;\ +\infty)$; если $0<a<1$, то функция убывает при $x\in(0;\ +\infty)$.
7. Экстремумов нет.



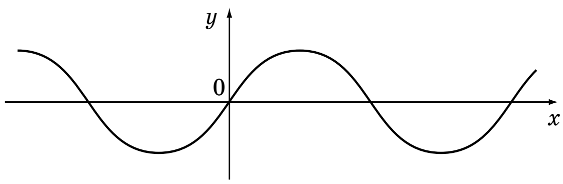
$a>1$

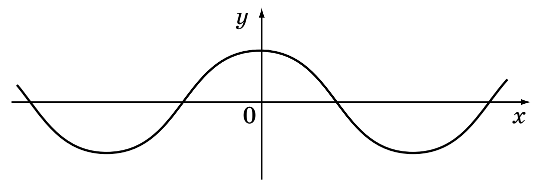


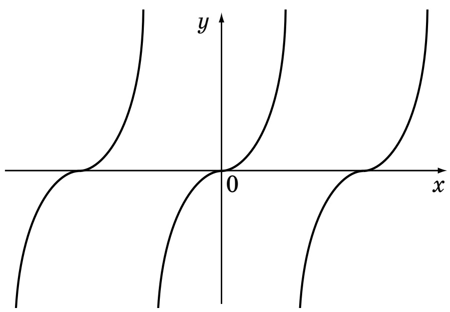
$0<a<1$

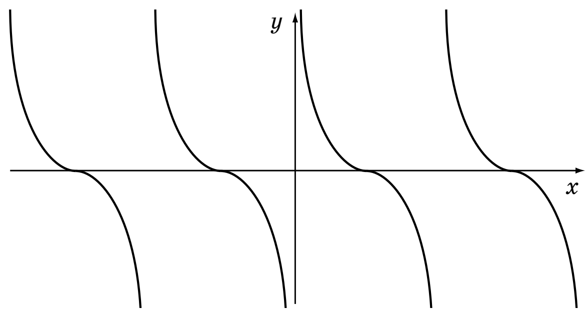
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

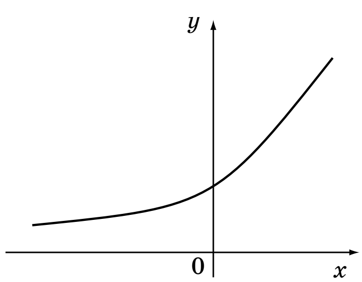
♦ **Подпишите графики функций:**

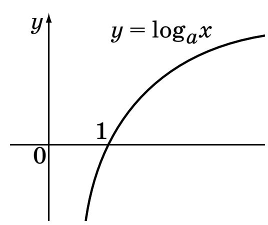












Ответы на тестовые задания к неделе 19

1 — –3. **2** — 0,5. **3** — –2. **4** — –4. **5** — –2. **6** — –2. **7** — 0.

НЕДЕЛЯ 20

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

4.1. Производная
- 4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
- 4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком
- 4.1.3. Уравнение касательной к графику функции
- 4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного
- 4.1.5. Производные основных элементарных функций

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

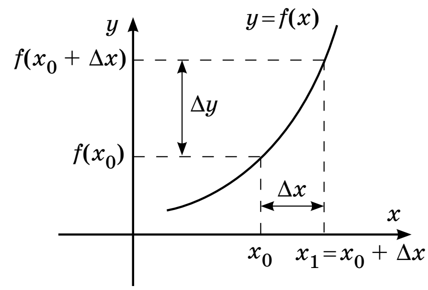
Приращение аргумента и функции

$\Delta x = x_1 - x_0$ — приращение аргумента в точке x_0;

$x_1 = x_0 + \Delta x$ — начальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx;

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$ — приращение функции в точке x_0;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Пример 1. Найдите приращение $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ в произвольной точке.

Решение. 1) $x = x_0$; $f(x_0) = 2x_0^2 + 3x_0 - 5$.

2) $x = x_0 + \Delta x$, тогда $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - 5 =$

$= 2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) + 3x_0 + 3\Delta x - 5 = 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5.$

3) Найдём приращение функции:

$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$= (2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5) - (2x_0^2 + 3x_0 - 5) = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3).$

Ответ: $\Delta f(x) = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3)$.

Производная функции *f*(*x*)

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,;\; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x}\,.$$

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Таблица производных некоторых функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C (C — const)	0
$kx+b$	k
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x},\ x>0$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}\ (x\neq 0)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Пример 1. По определению найдите производную функции $y=f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x)=3x^2-5x+1;\ x_0=2;$

б) $f(x)=\sqrt{7x-5};\ \ x_0=2.$

Решение.

а) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=((3(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+1)-$
$-(3x^2-5x+1)=6x\Delta x+3(\Delta x)^2-5\Delta x=\Delta x(6x+3\Delta x-5);$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x(6x+3\Delta x-5)}{\Delta x}=6x+3\Delta x-5;$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x-5)=6x-5;$$

$f'(x_0)=f'(2)=6\cdot 2-5=7.$

б) $\Delta f=\sqrt{7(x+\Delta x)-5}-\sqrt{7x-5}=$

$=\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5};$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x};$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7x+7\Delta x-5-7x+5}{\Delta x(\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5})}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7}{\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5}}=\frac{7}{2\sqrt{7x-5}};$$

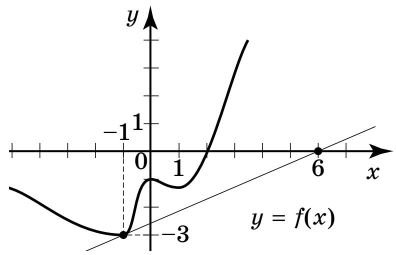
$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{7}{2\sqrt{7\cdot 2-5}}=\frac{7}{6}.$$

Ответ: а) $f'(2)=7$; б) $\dfrac{7}{6}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Прямая $y = 5x - 3$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 12$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x_0)$ в точке x_0.



3. Касательная к графику функции $y = x^2 - 6x + 9$ параллельна прямой $y = 2x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Вращение тела вокруг оси совершается по закону

$$\varphi(t)=4t^2-3t+2.$$

В какой момент времени t его угловая скорость равняется 21 рад/с? (φ измеряется в радианах, t — в секундах.)

5. Тело, масса которого 4 кг, движется прямолинейно по закону $s(t)=2-t+t^2$ (s измеряется в метрах, t — в секундах). Найдите кинетическую энергию (измеряется в Дж) тела $\dfrac{mv^2}{2}$ через 11 с после начала движения.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Найдите значение производной функции при заданном значении аргумента:

$$y = 4\cos x - 3\sin x; \quad x_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

7. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

8. Найдите вторую производную функции $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7$ в точке $x_0 = -1$.

9. Точка движется по закону

$$s(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t)^2.$$

Найдите ускорение движения точки через 1 с после начала движения. (Расстояние s измеряется в метрах.)

10. Найдите вторую производную функции $f(x) = \cos 2x$ и вычислите её значение при $x = \pi$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Пример 2. Найдите производные функций:

а) $y = x^{25}$; б) $y = \frac{1}{x^{10}}$.

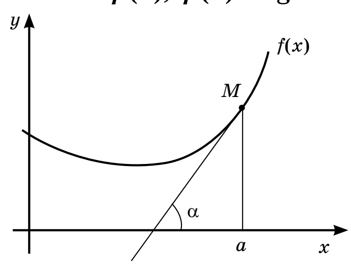
Решение.

а) $y' = (x^{25})' = 25x^{24}$; б) $y' = \left(\frac{1}{x^{10}}\right)' = -\frac{10}{x^{11}}$.

Геометрический смысл производной

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a); \; f'(a) = \operatorname{tg}\alpha.$$



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$

Как известно, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а в данном случае, поскольку $k = f'(a)$, уравнение касательной в точке $x = a$ имеет вид:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Пример 1. Составьте уравнения касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение.

1. Вычислим $f(a)$. $f(a) = \frac{1}{1} = 1$.
2. Найдём $f'(x)$ и вычислим $f'(a)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;
   $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
3. Подставим найденные значения в формулу
   $y = 1 - (x - 1)$; $y = 2 - x$.

Ответ: $y = 2 - x$.

Пример 2. К параболе $y = 3x^2 - 5x + 8$ в некоторой точке проведена касательная под углом 45° к оси абсцисс. Найдите точку касания.

Решение. $M(x_0; y_0)$ — точка касания. Точка M принадлежит кривой $y = 3x^2 - 5x + 8$, тогда $y_0 = 3x_0^2 - 5x_0 + 8$.

По условию, $y'(x_0) = \operatorname{tg} 45° = 1$. Но $y' = 6x - 5$, тогда $6x_0 - 5 = 1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 6$.

Ответ: $M(1; 6)$.

П р и м е р 3. К графику функции $y = \dfrac{x^3}{3}$ проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x + 7$.

Решение. Если касательная параллельна прямой $y = 4x + 7$, то угловой коэффициент этой касательной $k = 4$.

Но $k = f'(x_0)$. Тогда $f'(x) = x^2$ и $f'(x_0) = x_0^2$; $x_0^2 = 4$; $x_{0_1} = 2$ или $x_{0_2} = -2$.

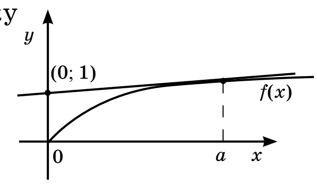
То есть имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи:

1) $x_0 = 2$, тогда $f(x_0) = f(2) = \dfrac{8}{3}$; $f'(x_0) = f'(2) = 4$; $y = \dfrac{8}{3} + 4(x - 2)$; $y = 4x - \dfrac{16}{3}$;

2) $x_0 = -2$, тогда $f(x_0) = f(-2) = -\dfrac{8}{3}$; $f'(x_0) = f'(-2) = 4$; $y = -\dfrac{8}{3} + 4(x + 2)$; $y = 4x + \dfrac{16}{3}$.

Ответ: $y = 4x - \dfrac{16}{3}$ или $y = 4x + \dfrac{16}{3}$.

П р и м е р 4. Из точки (0; 1) проведите касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$.



Решение. Пусть $x = a$ — абсцисса точки касания, $a > 0$;

$$f(a) = \sqrt{a};\quad f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

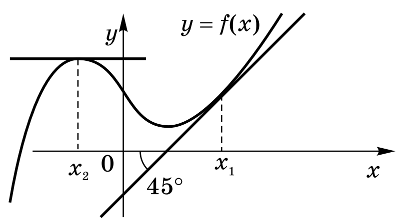
Подставим найденные значения в уравнение касательной:

$$y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a).$$

По условию касательная проходит через точку (0; 1). Подставим в это уравнение $x = 0$; $y = 1$. Получим, что $a = 4$.

Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = \sqrt{4} + \dfrac{1}{2\sqrt{4}}(x - 4)$, т. е. $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

Ответ: $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

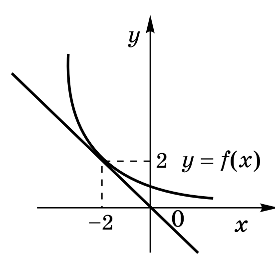


П р и м е р 5. На рисунке изображён график функции и касательные к графику в точках x_1 и x_2. Пользуясь геометрическим смыслом производной, найдите $f'(x_1) + f'(x_2)$.

Решение. Поскольку $f'(x_1) = \text{tg}\,45° = 1$; $f'(x_2) = \text{tg}\,0° = 0$, то $f'(x_1) + f'(x_2) = 1 + 0 = 1$.

Ответ: 1.

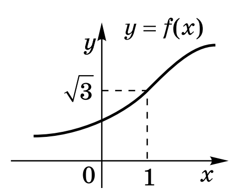
П р и м е р 6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение $f'(x_0)$.



Решение. $f'(x_0) = \text{tg}\,\varphi = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Ответ: -1.

П р и м е р 7. На рисунке изображён график производной функции $y = f(x)$. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке $x = 1$.



Решение. $\text{tg}\,\varphi = f'(x_0) = f'(1) = \sqrt{3}$, тогда $\varphi = \text{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Физический смысл производной

Производная характеризует **скорость изменения функции** при изменении **аргумента**. Если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения является производной от функции, выражающей зависимость пройденного пути s от времени t.

$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени;

$v = s'(t)$ — скорость прямолинейного движения;

$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения.

Пример. Материальная точка движется по закону $s = 4t^3 + t^2 + 8$ (s измеряется в метрах, t — в секундах).

Найдите скорость и ускорение в момент $t = 2$ с.

Решение.

1. $v = s'(t) = 12t^2 + 2t$ — скорость движения точки в любой момент времени t.
2. $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 48 + 4 = 52$ (м/с) — скорость движения точки в момент $t = 2$ с.
3. $a = v'(t) = 24t + 2$ — ускорение движения точки в момент t.
4. $a(2) = 24 \cdot 2 + 2 = 50$ (м/с^2) — ускорение движения в момент $t = 2$ с.

Ответ: 52 м/с; 50 м/с^2.

Таблица производных

Производная тригонометрической функции

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x;\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x;\ x \neq \pi n,\ n \in Z$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Пример 1. Найдите производные функций: а) $y = x \sin x$; б) $y = \frac{\cos x}{x}$.

Решение.

а) $y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$;

б) $y' = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot x - \cos x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Ответ: а) $\sin x + x \cos x$; б) $\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Пример 2. Найдите производную функции: $y = \sin x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

Ответ: 0.

Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \ln a; \ (e^x)' = e^x$$

Пример 1. Найдите производную функции:
а) $y = 5^x$; б) $y' = e^{3-2x}$.
Решение.
а) $y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$; б) $y' = (e^{3-2x})' = e^{3-2x} \cdot (3 - 2x)' = -2e^{3-2x}$.

Пример 2. Найдите $f'(0)$, если $f(x) = 5^x$.
Решение.
$f'(x) = (5^x)' = 5^x \ln 5$; $f'(0) = 5^0 \ln 5 = \ln 5$.
Ответ: $\ln 5$.

Производная логарифмической функции

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Пример. Найдите производную функции:
а) $y = \log_2 x$; б) $y = \ln (x^2 + 1)$.
Решение.
а) $y' = (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x\ln 2}$; б) $y' = (\ln(x^2+1))' = \dfrac{1}{(x^2+1)} \cdot (x^2+1)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Производная суммы двух функций

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Пример. Найдите производную функции:
Решение. $(\cos x + \sqrt{x})' = (\cos x)' + (\sqrt{x})' = -\sin x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производная произведения двух функций

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(CU(x))' = C \cdot U'(x).$$

Пример. Найдите производную функции: $y = x^2 \sin x$.
Решение.
$y' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Производная частного двух функций

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$\text{в частности } \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Пример. Найдите производную функции: а) $y = \dfrac{3x+2}{\sin x}$; б) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение.

а) $\left(\dfrac{3x+2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(3x+2)'\sin x - (\sin x)'(3x+2)}{\sin^2 x} = \dfrac{3\sin x - (3x+2)\cos x}{\sin^2 x}$;

б) $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'}{(\cos x)^2} = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Производная сложных функций

Производная сложной функции (функция от функции):

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

Пример. Найдите производные функций: а) $y = \sin(2x + 3)$; б) $y = 2^{3x-1}$; в) $y = \log_2(5x - 1)$; г) $y = \sin 17x$; д) $y = \cos^2 x$.

Решение.

а) $y' = (\sin(2x + 3))' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3)$;

б) $y' = (2^{3x-1})' = 2^{3x-1} \cdot \ln 2 \cdot (3x - 1)' = 3\ln 2 \cdot 2^{3x-1}$;

в) $y' = (\log_2(5x-1))' = \dfrac{1}{(5x-1)\ln 2} \cdot (5x-1)' = \dfrac{5}{(5x-1)\ln 2}$.

г) $y' = (\sin 17x)' = \cos 17x \cdot (17x)' = 17\cos 17x$;

д) $y' = (\cos^2 x)' = 2\cos \cdot (\cos x)' = 2\cos \cdot (-\sin x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините функцию и соответствующую ей производную:**

$kx + b$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
x^n	$\cos x$
$\sqrt{x}$	k
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\cos x$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\sin x$

Ответы на тестовые задания к неделе 20

1 — –1. **2** — $\frac{3}{7}$. **3** — 4. **4** — 3. **5** — 882. **6** — 4. **7** — 21,125. **8** — 2. **9** — 13. **10** — –4.

НЕДЕЛЯ 21

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

4.2. Исследование функций

- 4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков
- 4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

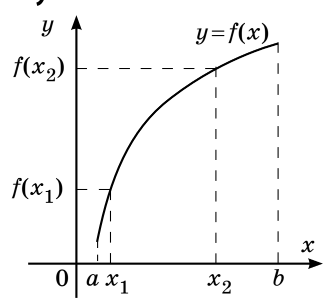
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Промежутки монотонности

1. Возрастание и убывание функции на промежутке

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(a;\ b) \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ для всех $x_1;\ x_2 \in (a;\ b)$.

Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(a;\ b) \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x_1;\ x_2 \in (a;\ b)$.

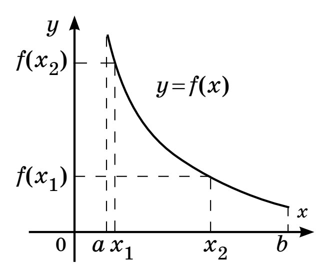


2. Достаточное условие возрастания, убывания функций

Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b)$.

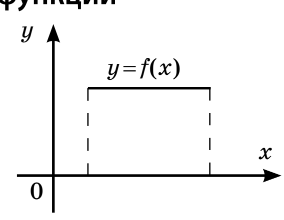
Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b)$.

Если функция непрерывна на концах промежутка, то их можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

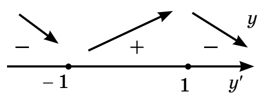
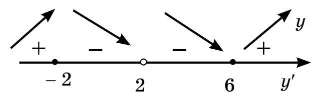


3. Необходимое и достаточное условие постоянства функций

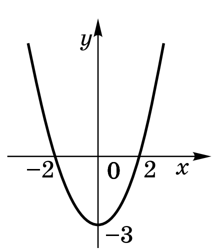
Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ **постоянна** на промежутке $(a;\ b)$.



4. Нахождение промежутков возрастания и убывания функций

$y = 3x - x^3$	$y = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$
1) Найдём область определения функции	
$D(y) = \mathrm{R}$	$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
2) Найдём производную и разложим её на множители (если возможно)	
$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(x + 1)$	$y' = \dfrac{(2x+6)(x-2)-(x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-12}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$
3) Исследуем знак производной методом интервалов	
	
4) Выбираем промежутки, в которых $f'(x) > 0$; $f'(x) < 0$	
$f'(x) > 0$, $x \in (-1;\ 1)$; $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$	$f'(x) > 0$, $x \in (-\infty;\ -2) \cup (6;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$, $x \in (-2;\ 2) \cup (2;\ 6)$
5) Записываем промежутки возрастания (убывания) с учётом непрерывности на концах промежутка	
возрастает на $[-1;\ 1]$; убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$	возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[6;\ +\infty)$; убывает на $[-2;\ 2)$ и $(2;\ 6]$

Промежутки монотонности и график производной



Пример. По графику производной, изображённому на рисунке, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$:

а) возрастает;

б) убывает.

Решение.

а) Функция возрастает, если $f'(x) > 0$. Так как $f'(x) > 0$, если $x \in (-\infty;\ -2)$; $x \in (2;\ +\infty)$, то функция $f(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty;\ -2]$; $x \in [2;\ +\infty)$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 6)e^{x-5}$ на отрезке [4; 6].

Область определения функции $y = (x - 6)e^{x-5}$: R, т. е. вся числовая ось.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 - a = 0$ имеет три решения. В ответ запишите наименьшее целое из них.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x - \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 19)e^{x-18}$ на отрезке [17; 19].

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Запишите число 25 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

6. Забором, длина которого равна 100 м, нужно огородить наибольший по площади прямоугольный участок земли, если он граничит с речкой. Какими должны быть размеры участка, если со стороны реки забора нет?

7. Из всех прямоугольников, периметр которых 28 см, найдите тот, у которого наименьшая диагональ.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

б) Функция убывает, если $f'(x) < 0$. Так как $f'(x) < 0$, если $x \in (-2;\ 2)$, то функция $f(x)$ убывает, если $x \in [-2;\ 2]$.

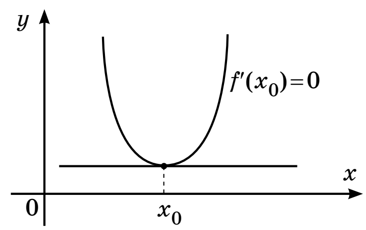
Ответ: а) $x \in (-\infty;\ -2]$, $x \in [2;\ +\infty)$; б) $x \in [-2;\ 2]$.

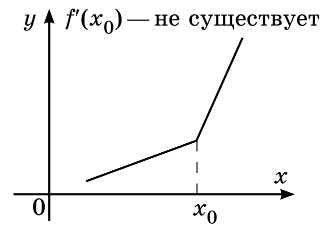
Экстремумы функции

1. Критические точки функции

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная функция, x_0 — внутренняя точка её области определения.

Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует $\Rightarrow$ x_0 — **критическая точка**.



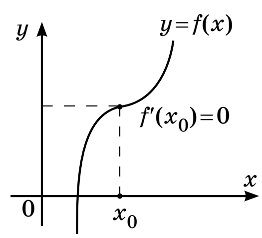


2. Необходимые условия экстремума

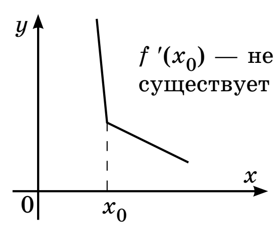
Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Если x_0 — точка экстремума $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

Точки **экстремума необходимо искать** только среди критических точек, но не каждая критическая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.



$f'(x_0) = 0$, но x_0 не является точкой экстремума



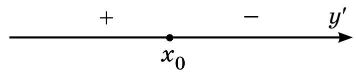
$f'(x_0)$ не существует, но x_0 не является точкой экстремума

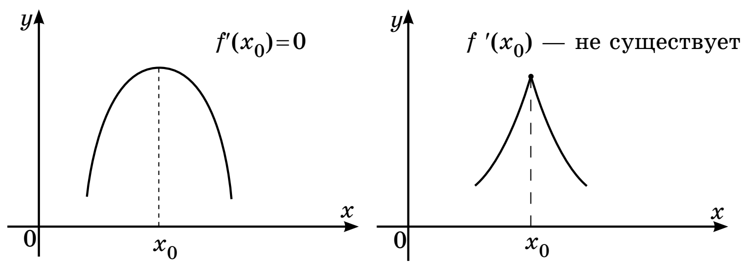
3. Достаточные условия экстремума

Первый признак.

Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует, тогда:

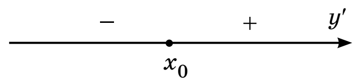
а) если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то

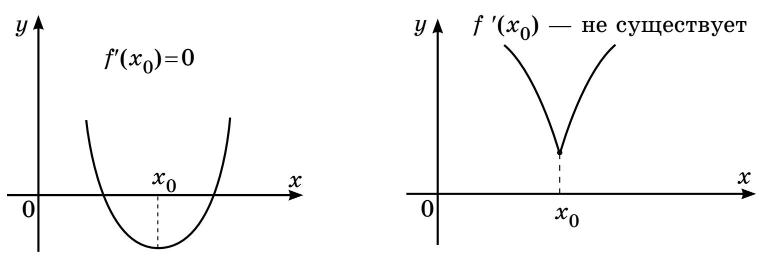




$x_0 = x_{\max}$ — точка максимума;

б) если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то

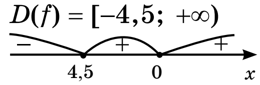




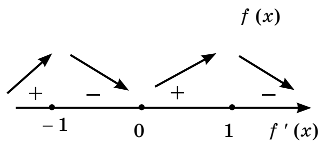
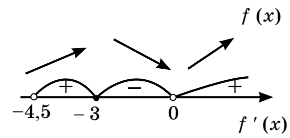
$x_0 = x_{\min}$ — точка минимума.

Второй признак.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума.
Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума.

4. Нахождение точек экстремума и экстремумов функций

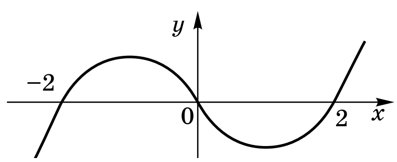
$f(x) = 2x^2 - x^4$	$f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$
1) Найдём область определения функции	
$D(f) = \mathrm{R}$	$2x^3 + 9x^2 \geqslant 0;\ x^2(2x + 9) \geqslant 0;$ $D(f) = [-4{,}5;\ +\infty)$ 
2) Найдём производную	
$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) =$ $= 4x(1 - x)(1 + x)$	$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 18x}{2\sqrt{2x^3 + 9x^2}} = \dfrac{3x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

3) Найдём критические точки: а) $f'(x)$ не существует; б) $f'(x) = 0$	
$f'(x)$ существует для всех $x \in \mathrm{R}$; $f'(x) = 0$; $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$	$f'(x)$ не существует, если $x = 0$. $x = -4{,}5$ не является внутренней точкой области определения; $f' = 0$; $x = -3$
4) Определим знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения	
	
5) Найдём точки экстремума	
$x = -1$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума; $x = 1$ — точка максимума	$x = -3$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума
6) Найдём экстремумы функций	
$f_{\min} = f(0) = 0$; $f_{\max} = f(-1) = 1$; $f_{\max} = f(1) = 1$	$f_{\max} = f(-3) = 3\sqrt{3}$; $f_{\min} = f(0) = 0$

Точки экстремумов функции

Пример. Пользуясь графиком производной $y = f'(x)$, изображённым на рисунке, укажите точки экстремума.



Решение. $x = -2$ — точка минимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = -2$, меняет «−» на «+».

$x = 0$ — точка максимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = 0$, меняется с «+» на «−».

$x = 2$ — точка минимума, поскольку знак производной, переходя через точку $x = 2$, меняется с «−» на «+».

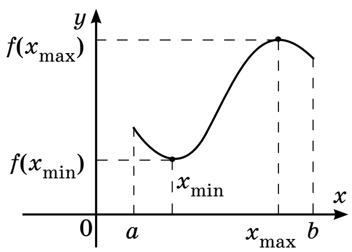
Ответ: $x = -2$, $x = 2$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума.

Наибольшее и наименьшее значение функции

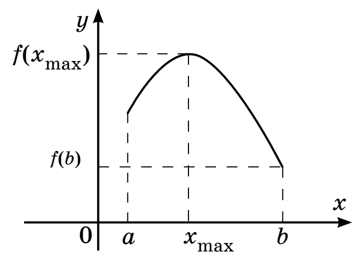
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди её значений на этом отрезке **есть наибольшее и наименьшее значение.**

Наибольшего и наименьшего значений функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

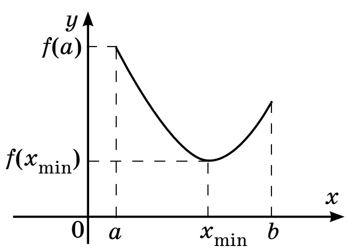
Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.



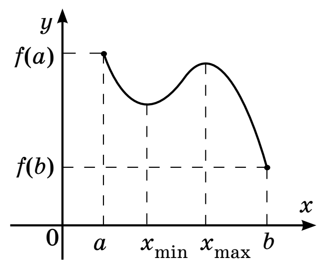
$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{max})$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{max})$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_{min})$



$\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$; $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$

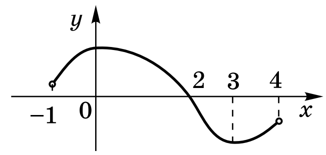
Отсюда вытекает **правило отыскания наименьших и наибольших значений на отрезке,** которое мы рассмотрим на примере.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке **[0; 6]**.

1. Найдём область определения функции $D(y)$	$D(y) = \mathrm{R}$
2. Найдём производную y'	$y' = 3x^2 - 6x - 45 = 3(x^2 - 2x - 15) =$ $= 3(x - 5)(x + 3)$
3. Найдём критические точки (в которых $y'(x) = 0$ или не существует)	y' существует для всех $x \in \mathrm{R}$. $y' = 0$; $3(x - 5)(x + 3) = 0$; $x = 5$; $x = -3$
4. Выберем те, которые принадлежат данному отрезку	$x = 5$ принадлежит отрезку [0; 6]
5. Вычислим значения функции $y = f(x)$ в этих критических точках и на концах отрезка	$y(0) = 225$; $y(5) = 50$; $y(6) = 63$
6. Сравним полученные результаты и выберем среди них наибольший и наименьший, запишем ответ	$\max\limits_{[0;\, 6]} y(x) = y(0) = 225$; $\min\limits_{[0;\, 6]} y(x) = y(5) = 50$.

Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной

Пример. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 4)$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение. Поскольку производная на промежутке $(-1; 2)$ положительная, то функция на данном промежутке возрастает, а на промежутке $(2; 4)$ производная отрицательная, значит, функция убывает. Наибольшее значение функция принимает в точке $x_0 = 2$.

Ответ: $x_0 = 2$.

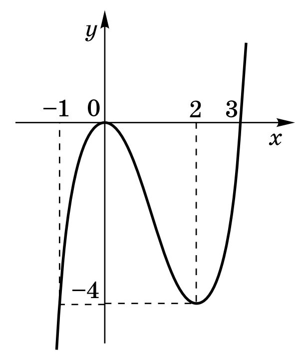
Построение графиков функций

Исследование функции и построение графика функции проводят в такой последовательности:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика с координатными осями;
3) уточнить чётность (нечётность), периодичность функции;
4) найти производную и критические точки;
5) найти промежутки возрастания (убывания), точки экстремума и экстремальные значения функции;
6) уяснить поведение функции на концах области определения;
7) построить график.

Пример. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и постройте её график.

Решение.



1. Область определения — R.

2. Найдём абсциссы точек пересечения графика с осью Ox:

$x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$; $x = 3$.

Найдём ординату точки пересечения графика с осью Oy:

$y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

3. Поскольку $f(-x) = (-x)^3 = 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 - 3x^2$, то функция общего вида, не периодическая.

4. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Находим критические точки:

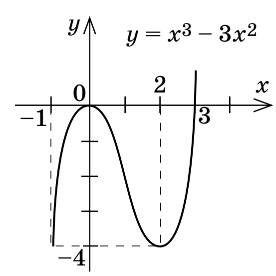
$f'(x) = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

5. Находим промежутки монотонности, точки экстремумов и экстремальные значения.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	–4	↗
		max		min	

6. Построим график функции.

Схема исследования функции

<table>
<tr><th rowspan="2">Правило</th><th>Пример</th></tr>
<tr><th>$f(x)=x^3-3x^2$</th></tr>
<tr><td>1. Находим $D(f)$</td><td>$D(f)=\mathrm{R}$</td></tr>
<tr><td>2. Находим точки пересечения графика функции с координатными осями</td><td>Найдём абсциссы точек пересечения графика с осью Ox:
$x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$; $x=0$ или $x=3$.
Найдём ординаты точек пересечения графика с осью Oy: $y=0^3-3\cdot 0^2=0$</td></tr>
<tr><td>3. Определяем чётность (нечётность), периодичность функции</td><td>Так как $f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$, то функция ни чётная, ни нечётная. Функция непериодическая</td></tr>
<tr><td>4. Находим производную и критические точки</td><td>Найдём производную:
$f'(x)=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$.
$D(f')=\mathrm{R}$. Найдём критические точки:
$f'(x)=0$; $3x(x-2)=0$; $x=0$, $x=2$</td></tr>
<tr><td>5. Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы</td><td>Составим таблицу:
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty;\ 0)$</td><td>0</td><td>$(0;\ 2)$</td><td>2</td><td>$(2;\ +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>0</td><td>$\searrow$</td><td>–4</td><td>$\nearrow$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>6. Определяем поведение функции на концах области определения</td><td>Используя результаты исследования, строим график функции $y=x^3-3x^2$

</td></tr>
</table>

Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной

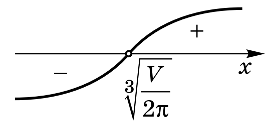
Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, нужно найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Пример. Найдите высоту цилиндра заданного объёма V, который имеет наименьшую полную поверхность.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x. Полная поверхность цилиндра $S = 2\pi x H + 2\pi x^2$, где H — высота цилиндра.

$$V = \pi x^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi x^2}.$$



«+», «−» — знаки $S(x)$

Подставляя это значение H в формулу для полной поверхности S, получаем:

$$S = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2 = S(x).$$

$$S'(x) = 2V\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\pi 2x = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Поскольку при переходе через точку $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ производная $S'(x)$ меняет знак с «−» на «+», то $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ — точка минимума.

Высота цилиндра $H = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{V^3 \cdot 4\pi^2}{\pi^3 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Ответ: $H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните схему исследования функции:**

1. Находим ______________________________

↓

2. Находим точки ______________________________
____

↓

3. Определяем ______________________________
____
____

↓

4. Находим ______________________________
и ______________________________ точки

↓

5. Находим промежутки ______________________________,
точки ______________________________

↓

6. Определяем поведение функции ______________________________
____

↓

7. Строим ______________________________

Ответы на тестовые задания к неделе 21

1 — –1. **2** — 1. **3** — 3. **4** — –1. **5** — 5 × 5. **6** — большая сторона 50, две меньшие по 25. **7** — квадрат со стороной 7 см.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 **21** 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 22

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

4.3. Первообразная и интеграл

4.3.1. Первообразные элементарных функций

4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

ПЕРВООБРАЗНАЯ

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех x из X выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$, где C — произвольное действительное число (основное свойство первообразной).

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	$x + C$
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$ $(x > 0)$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**, а операция нахождения первообразной — **интегрированием**.

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке x первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида $F(x) + C$, называют неопределённым интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$. Пользуясь таблицей первообразных, можно составить таблицу основных неопределённых интегралов.

$$\int 0dx = C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int dx = x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = x^6$ на множестве R.

Решение. Одной из первообразных функции f является $\frac{x^7}{7}$, так как $\left(\frac{x^7}{7}\right)' = \frac{1}{7}x^6 \cdot 7 = x^6$. Теперь в силу основного свойства первообразной получаем общий вид первообразных функции f: $F(x) = \frac{x^7}{7} + C$.

Ответ: $\frac{x^7}{7} + C$.

Пример 2. Для функции $f(x) = x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M (1; –1).

Решение. Найдём общий вид первообразных для функции f: $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

Так как $F(1) = -1$, то $-1 = \frac{1^4}{4} + C$, откуда $-4 = 1 + 4C$; $4C = -5$; $C = -\frac{5}{4}$; $C = -1\frac{1}{4}$. Следовательно, искомая первообразная $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1\frac{1}{4}$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1\frac{1}{4}$.

Пример 3. Найдите функцию f, если известен общий вид первообразных $F(x) = 3x^2 + C$.

Решение. Если $F(x) = 3x^2 + C$, то $f(x) = F'(x) = (3x^2 + C)' = 3 \cdot 2x + 0 = 6x$.

Ответ: $f(x) = 6x$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(x_0; y_0)$:

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3, \quad M(-1; 1).$$

В ответ запишите произведение всех коэффициентов полученного уравнения первообразной.

2. Вычислите $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$.

3. Вычислите $\int_3^{e+2} \frac{7dx}{x-2}$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Найдите объём тела V, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 9 - x^2$, $y = 0$. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

____

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\sin x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

____

6. Материальная точка движется по прямой так, что её скорость в момент времени t вычисляется по формуле $v(t) = 4t^3 + 1$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой с момента времени $t_1 = 2c$ до момента времени $t_2 = 5$ с.

____

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = -x^2 + 4x + 2$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Первообразная суммы функций

Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Если F — первообразная для f, а H — первообразная для h	$\Rightarrow$	$F + H$ — первообразная для $f + h$

Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Пример. Найдите первообразные для функции:

$$f(x) = x + \cos x.$$

Решение. Поскольку для x одной из первообразных является $\frac{x^2}{2}$, а для $\cos x$ одной из первообразных является $\sin x$, то одной из первообразных для функции $x + \cos x$ есть функция $\frac{x^2}{2} + \sin x$, следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Первообразная произведения функции на число

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Пример 1. Найдите первообразные для функции

$$f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2.$$

Решение. Поскольку одной из первообразных для функции e^x является функция e^x, то одной из первообразных для функции $5e^x$ является $5e^x$; поскольку одной из первообразных для функции $\sin x$ является $-\cos x$, то одной из первообразных для функции $7 \sin x$ является $-7 \cos x$; первообразной для функции $3x^2$ является $3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$.

Следовательно, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Ответ: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Пример 2. Найдите: $\int (1 + 3e^x - 4\cos x)dx$.

Решение. $\int(1+3e^x-4\cos x)dx=\int 1dx+3\int e^x dx-$
$-4\int\cos x dx = x+3e^x-4\sin x+C.$

Ответ: $x+3e^x-4\sin x+C.$

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(kx+m)dx=\dfrac{F(kx+m)}{k}+C.$

Если F — первообразная для f	$\Rightarrow$	$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$; k и $b = \mathrm{const}$, $k \neq 0$

Пример 3. Найдите первообразные для функций:

а) $f(x)=(7-3x)^5$;

б) $f(x)=e^{2x-1}$.

Решение.

а) Поскольку первообразной для функции x^5 является функция $\dfrac{x^6}{6}$, то искомые первообразные равны: $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(7-3x)^6}{6}+C=-\dfrac{(7-3x)^6}{18}+C.$

б) Поскольку одной из первообразных для функции e^x является e^x, то имеем:

$F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-1}+C.$

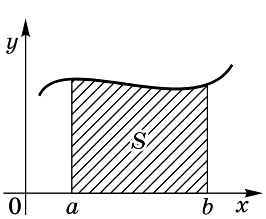
Ответ: а) $F(x)=-\dfrac{(7-3x)^6}{18}+C$; б) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-1}+C.$

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть задана непрерывная функция $y=f(x)$, определённая на промежутке $[a; b]$, тогда **определённым интегралом** от a до b функции $f(x)$ называется приращение первообразной $F(x)$ этой функции, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (формула Ньютона — Лейбница).

Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определённого интеграла

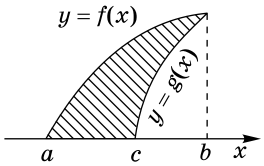


Площадь S криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$), вычисляется по формуле:

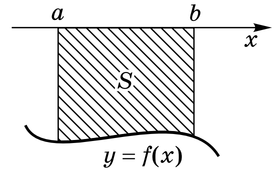
$$S=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

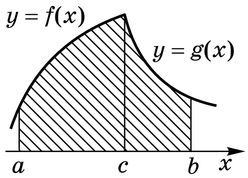
Вычисление площадей фигур



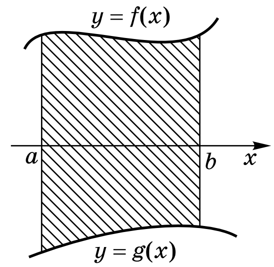
$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_c^b g(x)dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$



$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Пример 1. Вычислите: а) $\int\limits_{-1}^{2} x^2dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (8x-\sin x)dx$.

Решение.

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{(-1)^3}{3}=\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}=3;$

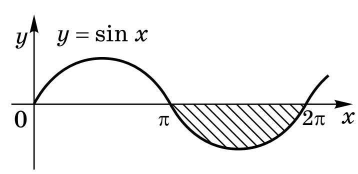
б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (8x-\sin x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 8xdx-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx=8\cdot\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$

$=4x^2\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\dfrac{\pi^2}{4}-0\right)+\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\pi^2-1.$

Ответ: а) 3; б) π^2-1.

Пример 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin x$, $y=0$, $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Решение.



Построим фигуру, площадь которой необходимо вычислить. Тогда

$S=-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=\cos 2\pi-\cos\pi=2.$

Ответ: 2.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Соедините функцию и соответствующую ей первообразную:**

0	C
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C \ (x > 0)$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\ x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\ x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Ответы на тестовые задания к неделе 22

1 — –12. **2** — $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **3** — 7. **4** — 259,2. **5** — 1. **6** — 612. **7** — 9.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛАМ «ФУНКЦИИ» И «НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

1. Найдите множество значений функции $y = \log_{0,5}(\sin x + 5)$.

2. Исследуйте на чётность (нечётность) функцию $y = |x - 2| + |x + 2|$.

3. При каких значениях параметра a функция $y = x^2 + (a - 2)x + 0,25$ не принимает отрицательных значений?

4. Найдите острый угол между касательными, проведёнными к кривым $y = \dfrac{18}{\sqrt{x}}$ и $y = \dfrac{12}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$ в точке их пересечения.

5. При каком значении параметра a минимальное значение функции $y = x^2 - 4ax - a^4$ наибольшее?

6. На параболе $y = x^2$ найдите точку, наименее удалённую от прямой $y = 2x - 4$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 **22** 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 23

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.1. Планиметрия
  5.1.1. Треугольник
5.5. Измерение геометрических величин
  5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ

ТРЕУГОЛЬНИК

Равенство треугольников

Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$.

На чертеже равные отрезки отмечают одной, двумя или тремя чёрточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

Для обозначения равенства треугольников используют обычный знак равенства: $\Delta PQR = \Delta MNK$. При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\Delta PQR = \Delta MNK$ означает, что $\angle P = \angle M$; $\angle Q = \angle N$; $\angle R = \angle K$. А запись $\Delta PQR = \Delta NKM$ означает уже другое: $\angle P = \angle N$; $\angle Q = \angle K$; $\angle R = \angle M$.

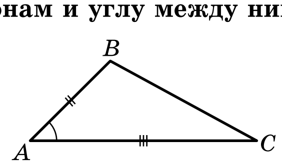
Свойства равных треугольников

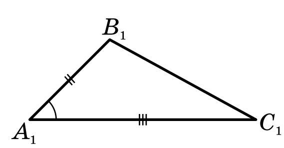
1. В равных треугольниках все соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.) равны.

2. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними.

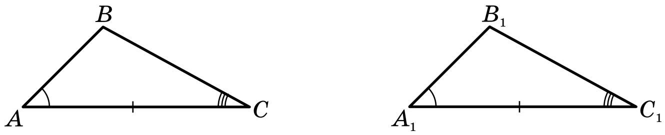




Если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Если **две стороны и угол между ними** одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

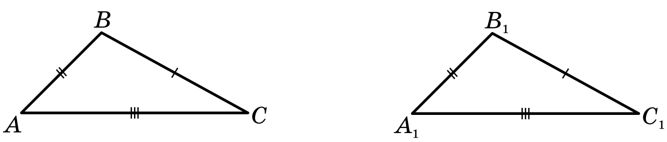
2. По стороне и прилежащим к ней углам.



Если $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$; $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

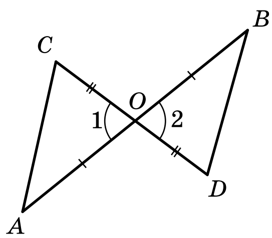
Если **сторона и прилежащие к ней углы** одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. По трём сторонам.



Если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Если **три стороны одного треугольника** равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

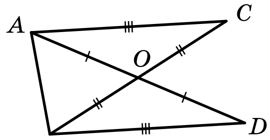


Пример 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если $AC = 10$ м?

Дано: $CO = OD$; $AO = OB$; $AC = 10$ м.

Найти: BD.

Решение. $CO = OD$; $AO = OB$ по условию; $\angle 1 = \angle 2$, так как они вертикальные; $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство их соответственных сторон $BD = AC$, т. к. по условию $AC = 10$ м, то и $BD = 10$ м.

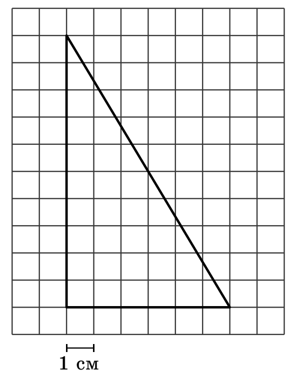


Пример 2. Даны ΔABC и ΔBAD. AB — общая сторона ΔABC и ΔBAD. Стороны AD и BC пересекаются в точке O, которая является их серединой. Доказать, что $\Delta AOC = \Delta BOD$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В равнобедренном треугольнике AKC с основанием AC боковая сторона AK равна 15, а $\cos\angle A = \frac{3}{5}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

2. Найдите площадь треугольника (в квадратных сантиметрах), который изображён на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см (см. рисунок).



ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM, которая делит сторону BC на отрезки BM и MC.

Найдите угол C, если $BC = 8$, $BM : MC = 7{:}5$, $AB + AC = 12$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 15, а $\cos\angle A = \dfrac{4\sqrt{14}}{15}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $AC = 5\sqrt{3}$. Найдите $\sin\angle A$.

6. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 28 см, 30 см.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Дано: $\Delta ABC = \Delta BAD$. $AO = DO$; $BO = CO$.

Доказать: $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Доказательство. $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные углы. $AO = OD$ и $CO = BO$ по условию, тогда $\Delta AOC = \Delta BOD$ по двум сторонам и углу между ними.

Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если они переводятся один в другой с помощью преобразования подобия.

Свойства подобных треугольников

1. У подобных треугольников соответственные **углы равны**, а соответственные **стороны пропорциональны**.

Если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{k}{k_1} = \ldots = k.$$

2. Отношение **периметров** подобных треугольников равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k.$$

3. Отношение **площадей** подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2.$$

Замечание. Из соотношения $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C}$ очевидно вытекает соотношение $AB : AC : BC = A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1$,

что тоже выражает пропорциональность сторон ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

Пример 1. *Дано*: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $A_1B_1 = 4$ см; $B_1C_1 = 5$ см; $A_1C_1 = 6$ см; $BC : B_1C_1 = 3$.

Найти: AB, AC и BC.

Решение. $BC : B_1C_1 = 3$ (по условию), тогда $BC = 3 \cdot B_1C_1 = 3 \cdot 5 = 15$ (см); $AC = 3 \cdot A_1C_1 = 3 \cdot 6 = 18$ (см); $AB = 3 \cdot A_1B_1 = 3 \cdot 4 = 12$ (см).

Ответ: $BC = 15$ см; $AC = 18$ см; $AB = 12$ см.

Пример 2. *Дано:* $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

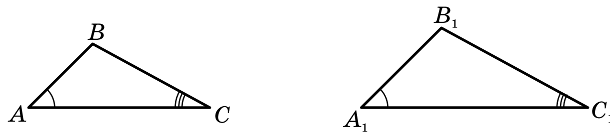
Найти: углы ΔMNP, если $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$.

Решение. У подобных треугольников соответственные углы равны, тогда $\angle A = \angle M = 45°$; $\angle C = \angle P = 75°$; $\angle B = \angle N = 180° - (45° + 75°) = 60°$.

Ответ: $\angle M = 45°$; $\angle N = 60°$; $\angle P = 75°$.

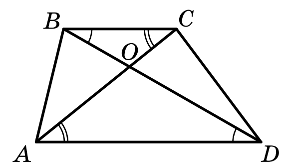
Признаки подобия треугольников

1. Признак подобия по двум углам.



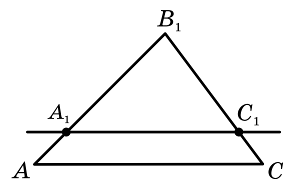
Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны:

если $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

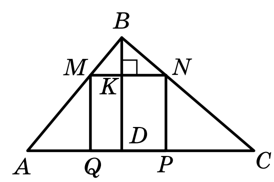


Следствия:

1. Равносторонние треугольники подобны.
2. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.
3. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу между соответственными сторонами.
4. При пересечении диагоналей трапеции образуются два подобных треугольника. $ABCD$ — трапеция; $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.
5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, пересекает две другие стороны, отсекает треугольник, подобный данному. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta AB_1C$, если $A_1C_1 \parallel AC$.



Пример. *Дано*: Основание треугольника 5 см, высота, проведённая к этому основанию, 3 см. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах.



Найти: сторону квадрата.

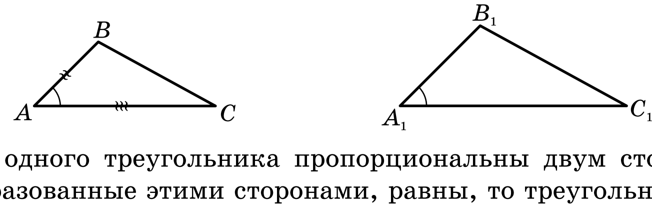
Решение. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (т. к. $MN \parallel AC$).

Тогда $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{BD}{BK}$. Пусть $MN = x$, тогда $BK = (3 - x)$ см; $AC = 5$ см.

Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BD}{BK}$; $\dfrac{5}{x} = \dfrac{3}{3-x}$; $5 \cdot (3 - x) = 3x$; $15 - 5x = 3x$; $8x = 15$; $x = \dfrac{15}{8}$; $x = 1{,}875$.

Ответ: 1,875 см.

2. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.



Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны:

если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

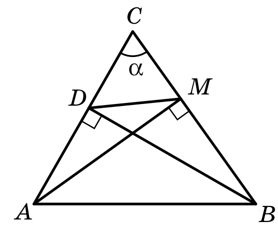
Пример. В ΔABC с острым углом C проведены высоты AM и BD. Доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta MDC$.

Решение. У треугольников ABC и MDC угол C общий.

Из ΔAMC: ($\angle AMC = 90°$) имеем:

$MC = AC \cdot \cos\alpha$;

из ΔDCB ($\angle BDC = 90°$) имеем: $DC = BC \cdot \cos\alpha$, т. е. стороны, прилежащие к углу C, у треугольников пропорциональны. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta MDC$ по двум углам.



3. Признак подобия треугольников по трём сторонам.

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то треугольники подобны:

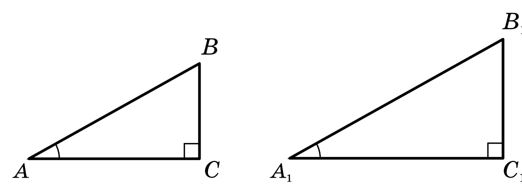
если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

1. По острому углу.

Если прямоугольные треугольники имеют по одному равному острому углу, то они подобны:

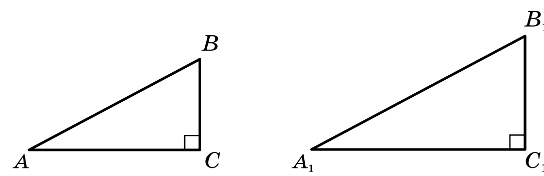
$$\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



2. По двум пропорциональным катетам.

Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны:

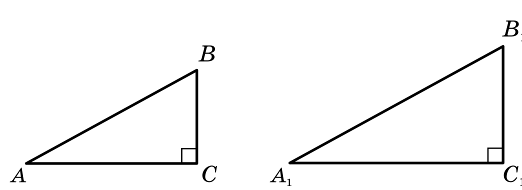
$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



3. По пропорциональным катету и гипотенузе.

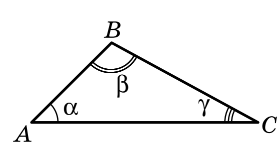
Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$



Сумма углов треугольника

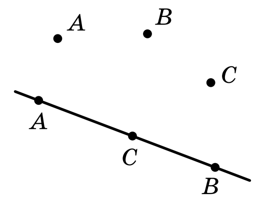
Сумма углов треугольника равна 180°.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Неравенство треугольника

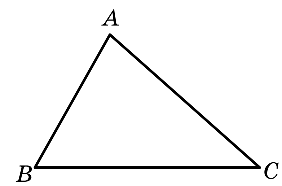
Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из них не больше суммы расстояний от них до третьей точки:

$$AB \leqslant AC + BC.$$



В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон:

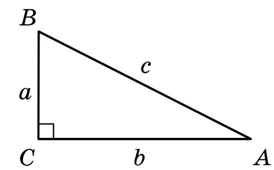
$$AB < AC + BC;$$
$$AC < AB + BC;$$
$$BC < AB + AC.$$



Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + CB^2} \textbf{ или } \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$



Следствия из теоремы Пифагора

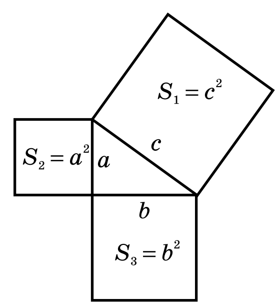
1. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

2. Квадрат катета равен разности квадратов гипотенузы и другого катета:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ и } b^2 = c^2 - a^2.$$

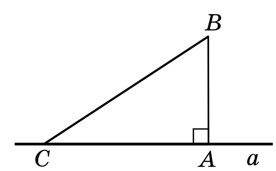
3. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах:

$$S_1 = S_2 + S_3.$$



Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.

Пусть BA — перпендикуляр к прямой a, C — любая точка прямой a, отличная от A, тогда BC — наклонная к прямой a, AC — проекция наклонной на прямую a, C — основание наклонной, A — основание перпендикуляра. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то:



1) любая наклонная больше перпендикуляра;
2) равные наклонные имеют равные проекции;
3) наклонные равны, если равны их проекции;
4) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше;
5) из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.

Решение треугольников

Стороны и углы треугольника называются **основными его элементами.**

«Решить треугольник» означает по трём основным элементам треугольника найти три других его основных элемента.

При этом среди заданных элементов хотя бы один должен быть стороной треугольника.

Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Следствия

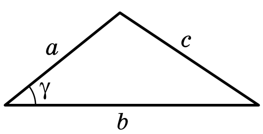
1. Косинус угла треугольника можно вычислить по формуле:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

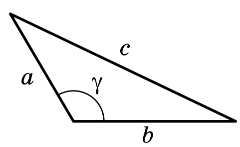
Аналогично: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

2. Если в треугольнике со сторонами a, b и c:

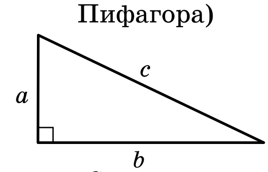
$a^2 + b^2 > c^2$, то угол γ, противолежащий стороне c, острый



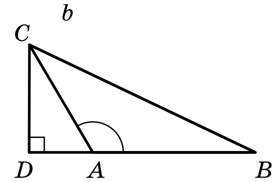
$a^2 + b^2 < c^2$, то угол γ — тупой



$a^2 + b^2 = c^2$, то угол γ — прямой (обратная теорема Пифагора)

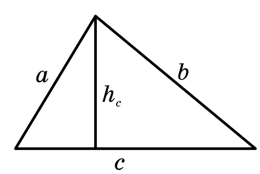


3. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «–» — когда угол острый.



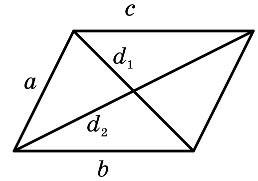
4. Если a, b и c — стороны треугольника, то высота, опущенная на сторону c, равна:

$$h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$



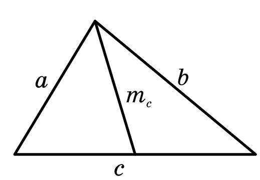
5. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$



6. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне c, вычисляется по формуле:

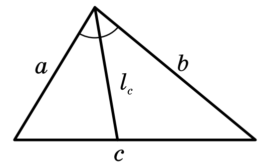
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$



7. Длина биссектрисы треугольника вычисляется по формуле:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

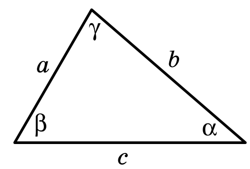
где l_c — биссектриса, проведённая к стороне c; a_1, b_1 — отрезки стороны c, на которые делит её биссектриса l_c.



Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

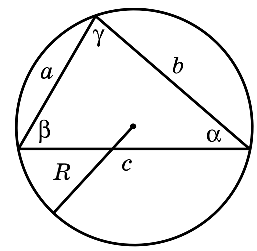
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



Замечание. **Полная формулировка теоремы синусов:** в треугольнике со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β и γ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около данного треугольника.



Следствие

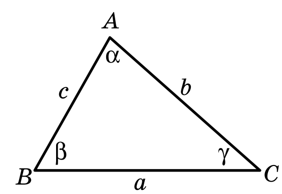
В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Пример 1. Решите треугольник по его стороне и прилежащим к ней углам.

Дано: a, β, γ.

Найти: α, b, c.

Решение. $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. По теореме синусов: $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.



Дано: $a = 5$; $\beta = 30°$; $\gamma = 45°$.

Найти: α, b, c.

Решение. $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 105°$.

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5\cdot\sin 30°}{\sin 105°} \approx \frac{5\cdot 0{,}5}{0{,}966} \approx 2{,}59; \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{5\cdot 0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

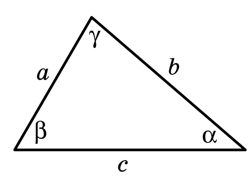
Ответ: $\alpha = 105°$; $b = 2{,}59$; $c = 3{,}66$.

Пример 2. Решите треугольник по трём сторонам.

Дано: a, b, c.

Найти: α, β, γ.

Решение. По теореме косинусов:



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

Дано: $a = 2$; $b = 3$; $c = 4$.

Найти: α, β, γ.

Решение. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2\cdot 3\cdot 4} = \dfrac{7}{8} \approx 0{,}875$; $\alpha \approx 29°$;

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2^2 + 4^2 - 3^3}{2\cdot 2\cdot 4} = 0{,}688; \ \beta \approx 47°; \ \gamma = 180° - 47° - 29° = 104°.$$

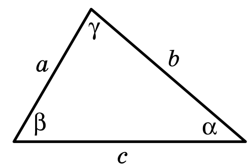
Ответ: $\alpha = 29°$; $\beta = 47°$; $\gamma = 104°$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Пример 3. Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Дано: a, b, γ.

Найти: α, β, c.



Решение. По теореме косинусов находим c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

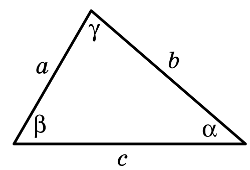
По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \ \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

Пример 4. Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Дано: a, b, α.

Найти: β, γ, c.



Решение. По теореме синусов $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$.

Угол β найдём с помощью таблиц или микрокалькулятора. $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

По теореме синусов находим c: $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Исследование.

Если $a < b$, задача имеет решение, если $a \geqslant b\sin\alpha$. Имеют место два случая:

1) $a = b\sin\alpha$, то $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = 1$, $\beta = 90^\circ$: одно решение;

2) $a > b\sin\alpha$, тогда задача имеет два решения: β может быть острым и тупым.

Если $a < b\sin\alpha$, то $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} > 1$, решения нет;

Дано: $a = 73{,}5$; $b = 86{,}4$; $\alpha = 49^\circ$.

Найти: β, γ, c.

Решение. Найдём величину угла β: $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} \approx \dfrac{86{,}4\cdot 0{,}7547}{73{,}5} \approx 0{,}887$.

Поскольку $a < b$ и $\dfrac{b\sin\alpha}{a} < 1$, то задача имеет два решения:

а) $\beta \approx 62^\circ 30'$; $\gamma = 180^\circ - (49^\circ + 62^\circ 30') \approx 68^\circ 30'$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \dfrac{73{,}5\cdot 0{,}9304}{0{,}755} \approx 90{,}6$.

б) $\beta_1 = 180^\circ - \beta \approx 117^\circ 30'$; $\gamma_1 = 180^\circ - (49^\circ + 117^\circ 30') \approx 13^\circ 30'$;

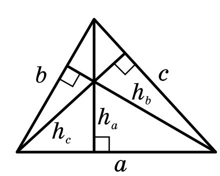
$$c_1 = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{73{,}5\cdot 0{,}2334}{0{,}755} \approx 22{,}7.$$

Ответ: $\beta = 62^\circ 30'$; $\gamma = 68^\circ 30'$; $c = 90{,}6$; или $\beta_1 = 117^\circ 30'$; $\gamma_1 = 13^\circ 30'$; $c_1 = 22{,}7$.

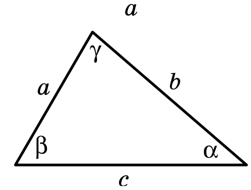
Площадь треугольника

Площадь S треугольника ABC вычисляется по формулам:

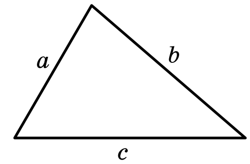
1. $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$.



2. $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$.



3. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ или

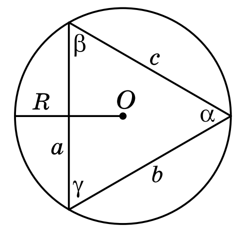


$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Данная формула называется **формулой Герона**.

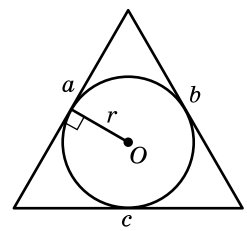
4. $S=\dfrac{abc}{4R}$ или $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.



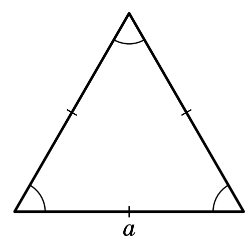
5. $S = p\cdot r$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$,

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.



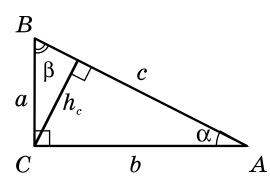
6. Площадь **равностороннего** (правильного) треугольника можно вычислить по формуле:

$$S_{\text{прав.тр}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



7. Площадь **прямоугольного** треугольника:

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h_c;\ S=\frac{a\cdot b}{2}.$$



Следствие. Стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т. е.

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

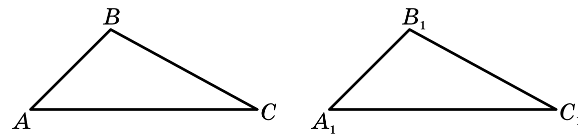
Это означает, что чем больше сторона треугольника, тем меньше высота, проведённая к ней.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

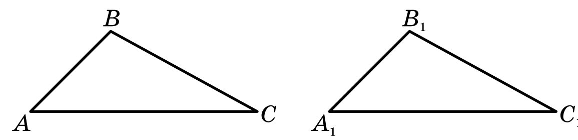
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

- **Запишите в математических выражениях и обозначьте графически признаки равенства треугольников:**

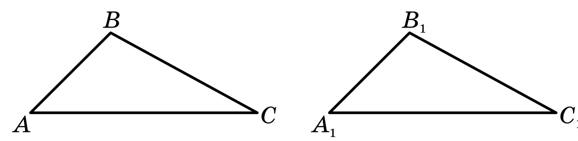
1.



2.



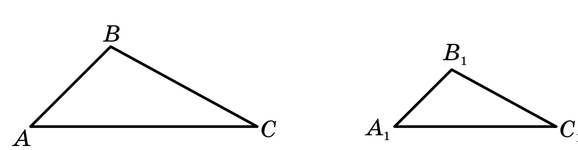
3.



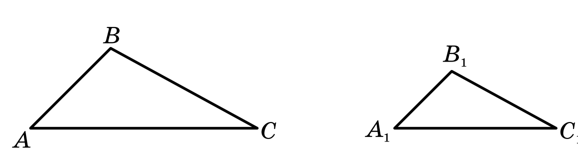
- **Запишите теорему косинусов:**

- **Запишите в математических выражениях и обозначьте графически признаки подобия треугольников:**

1.



2.

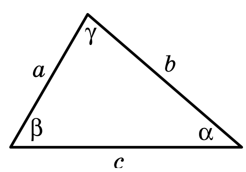


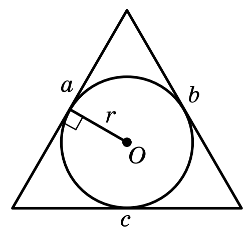
- ♦ **Схематически нарисуйте соответствующие треугольники.**

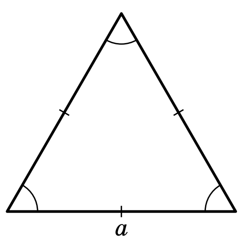
$a^2 + b^2 < c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 > c^2$

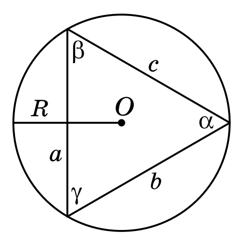
- ♦ **Запишите теорему синусов:**

- ♦ **Запишите к рисунку соответствующую формулу для площади треугольника:**









Ответы на тестовые задания к неделе 23

1 — 12. **2** — 30. **3** — 60. **4** — 1. **5** — 0,5. **6** — 336.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 **23** 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 24

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

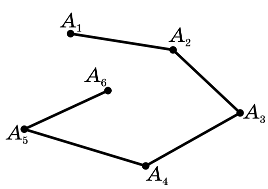
5.1. Планиметрия
- 5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат
- 5.1.3. Трапеция

5.5. Измерение геометрических величин
- 5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

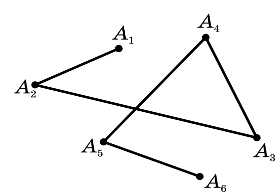
МНОГОУГОЛЬНИКИ

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ **называется фигура, которая состоит из точек** A_1, A_2, A_3, ..., A_n **и соединяющих их отрезков** A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, ..., A_n называются **вершинами** ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — **звеньями** ломаной.

Ломаная называется **простой**, если она не имеет самопересечений.



простая ломаная

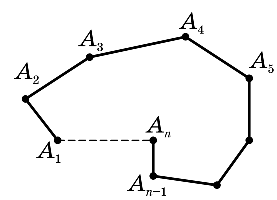


ломаная с самопересечениями

Длиной ломаной называется сумма длин её звеньев.

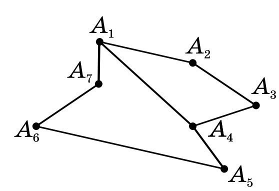
Свойство длины ломаной. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы.

$$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n.$$



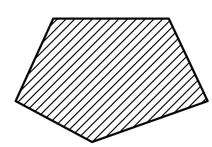
Выпуклые многоугольники

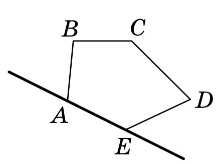
Ломаная называется **замкнутой**, если её концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**, если её соседние звенья не лежат на одной прямой.



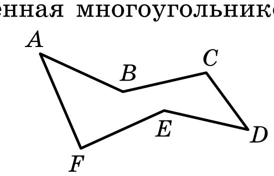
Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника**; отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются **диагоналями**. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами, называется ***n*-угольником.**

Плоским многоугольником, или **многоугольной областью** называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.





выпуклый многоугольник

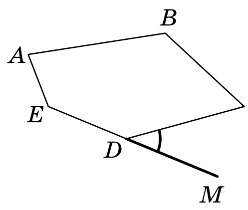


невыпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами. **Внешним углом выпуклого** многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.

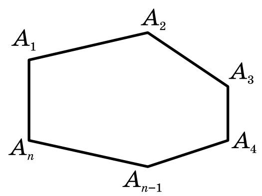
$\angle BAE$, $\angle ABC$ — углы выпуклого многоугольника.



Сумма углов выпуклого многоугольника

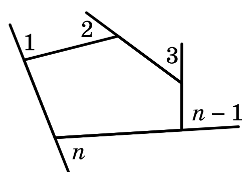
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°\ (n-2)$:

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n = 180°\ (n-2).$$



Сумма **внешних углов** выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°:

$$\angle 1 + \angle 2 + \ldots + \angle n = 360°.$$

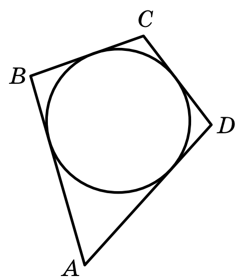


Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются окружности.

У четырёхугольника, описанного около окружности, **суммы длин противоположных сторон равны**:

$$AB + DC = AD + BC.$$

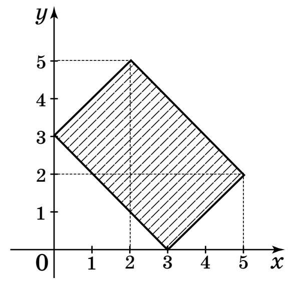


ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите большую диагональ параллелограмма $ABCD$, стороны которого относятся как 2 : 3, а перпендикуляр AM, проведённый к меньшей диагонали, делит её на отрезки 4 и 9.

____

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0; 3); (2; 5); (5; 2); (3; 0).



____

3. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 4 см и 8 см, а угол между ними равен 30°.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма всех внутренних углов которого и всех внешних углов, взятых по одному при каждой вершине многоугольника, равна 1440°.

5. Число диагоналей выпуклого многоугольника равно 119. Найдите сумму его внутренних углов.

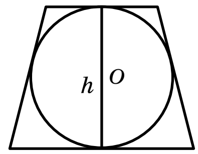
6. Найдите число сторон *n*-угольника, если три его угла составляют по 186°, а остальные — по 126°.

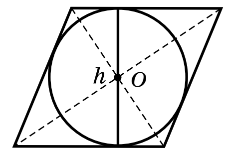
7. Найдите количество сторон правильного многоугольника, внутренний угол которого на 100° больше его внешнего угла.

8. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника, если их разность равна 11 см.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Если в выпуклом четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.





Если **трапеция** или **ромб** описаны около окружности, то их высоты равны диаметру окружности.

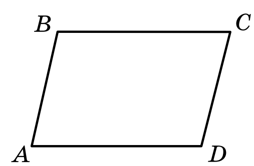
Теорема Паскаля. Если **шестиугольник** вписан в окружность и противоположные его стороны непараллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.

Теорема Брианшона. Если **шестиугольник** описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма

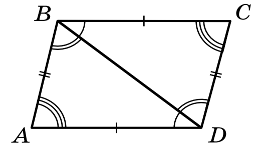
Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.



Свойства параллелограмма

1. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма равны.
3. Противоположные углы параллелограмма равны.
4. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам:
   $\Delta ABD = \Delta CDB$, $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$, $AB = CD$; $BC = AD$.
   $AO = OC$; $BO = OD$.

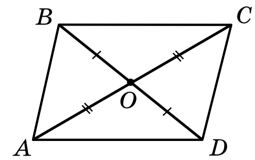


5. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

6. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°:

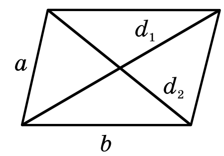
$$\angle A + \angle B = 180°,$$

$$\angle B + \angle C = 180°.$$



7. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$



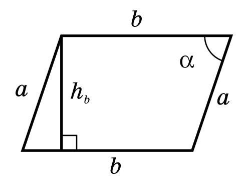
Признаки параллелограмма

1. Если **диагонали** четырёхугольника **точкой пересечения делятся пополам**, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
2. Если **противоположные стороны** четырёхугольника **равны** друг другу, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
3. Если в четырёхугольнике **две противоположные стороны равны и параллельны**, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
4. Если **противоположные углы** четырёхугольника **равны**, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне:

$$S_{\text{пар}} = b \cdot h_b.$$



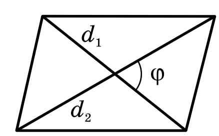
Площадь параллелограмма можно найти также по формуле:

$$S_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Следствие. Первая формула площади параллелограмма позволяет утверждать, что в параллелограмме **большей** будет высота, проведённая к **меньшей** стороне, **меньшей** — высота, проведённая к **большей** стороне.

Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$



Прямоугольник. Площадь прямоугольника

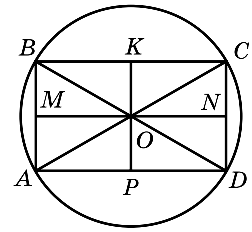
Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы равны.

Свойства прямоугольника

1. **Диагонали** прямоугольника **равны.**

2. Точка пересечения диагоналей прямоугольника является **центром окружности, описанной** около этого прямоугольника.

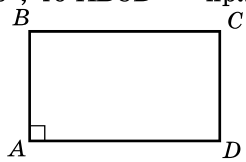
3. Прямая, соединяющая середины противоположных сторон прямоугольника, является осью симметрии. $AC = BD$, т. O — центр описанной окружности, MN и KP — оси симметрии.



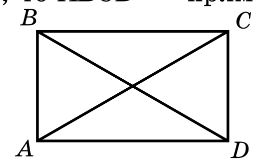
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Признаки прямоугольника

1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник.



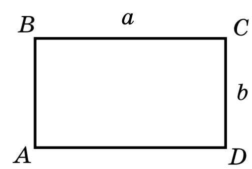
2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.



Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:

$$S_{\text{пр}} = ab.$$

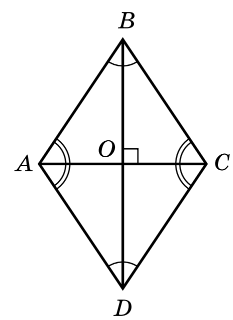


Ромб. Площадь ромба

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба

1. Диагонали ромба делят его на четыре равных прямоугольных треугольника.
2. Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам (т. е. AC и BD — биссектрисы углов ромба).
3. Диагонали ромба являются его осями симметрии.
4. Точка пересечения диагоналей ромба является центром вписанной окружности.

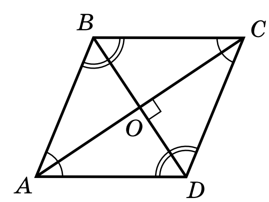


Признаки ромба

Если $ABCD$ — параллелограмм и

1. $\Delta AOB = \Delta COB = \Delta COD = \Delta AOD$ или
2. $AC \perp BD$ или
3. AC и BD — биссектрисы углов,

то $ABCD$ — ромб.

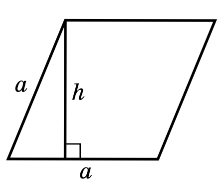


Площадь ромба

Площадь ромба равна:

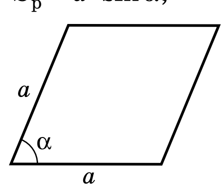
а) произведению высоты на сторону:

$$S_{\text{р}} = ah;$$



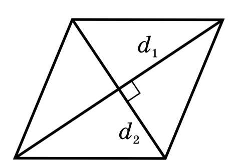
б) произведению квадрата стороны на синус угла ромба:

$$S_{\text{р}} = a^2 \sin\alpha;$$

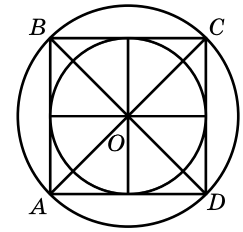


в) половине произведения диагоналей:

$$S_{\text{р}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$



Квадрат. Площадь квадрата



Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат — это ромб, у которого все углы прямые.

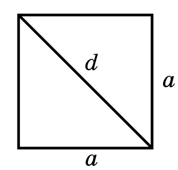
Квадрат имеет все свойства ромба и прямоугольника.

Квадрат — это правильный четырёхугольник.

Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два серединных перпендикуляра к сторонам.

Точка пересечения диагоналей — центр вписанной и описанной окружностей.

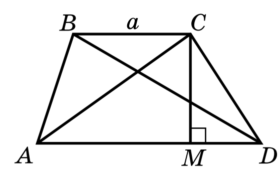
Площадь квадрата



Площадь квадрата равна квадрату его стороны или половине квадрата диагонали:

$$S_{\text{кв}} = a^2 \text{ или } S_{\text{кв}} = \frac{d^2}{2}, \text{ т. е. } a = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Трапеция



Трапеция — четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие — непараллельны.

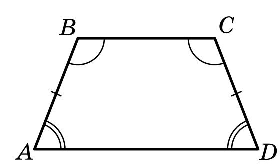
Параллельные стороны называют **верхним** (BC) и **нижним** (AD) **основаниями**; непараллельные — **боковыми сторонами.**

Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называют **диагоналями** трапеции (AC и BD).

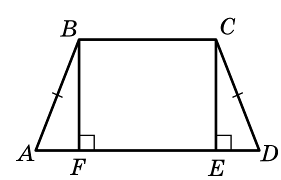
Высотой трапеции ($CM \perp AD$) называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.

Трапеция называется **равнобокой (равнобедренной, равнобочной)**, если её боковые стороны равны.

Свойства равнобокой трапеции



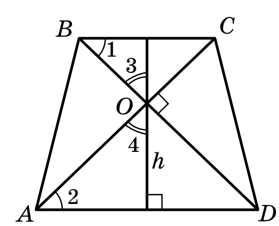
1. Углы при основании равнобокой трапеции равны, т. е. $\angle B = \angle C$; $\angle A = \angle D$.



2. $AF = ED = \dfrac{AD - BC}{2}$;

   $AE = FD = \dfrac{AD + BC}{2}$.

3. Диагонали равнобокой трапеции равны: $AC = BD$.



4. $AO = OD$; $BO = OC$; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.

   Заметим, что если выполняется одно из утверждений 1–4, то трапеция — равнобокая.
5. Если $BD \perp AC$, то высота равнобокой трапеции равна полусумме оснований:

$$h = \frac{BC + AD}{2}.$$

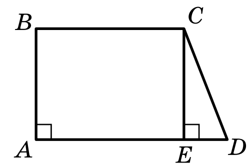
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям, называется **прямоугольной.**

$CE \perp AD$; $AB = CE$;

$ABCE$ — прямоугольник,

$ED = AD - BC$.

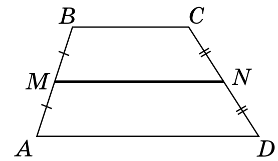


Средняя линия трапеции. Свойства трапеции

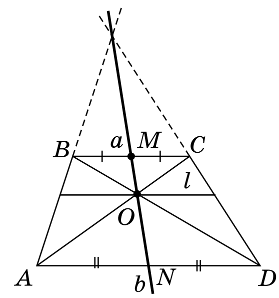
1. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции.**

   Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и **равна полусумме оснований:**

$$BC \parallel MN \parallel AD; \quad MN = \frac{BC + AD}{2}.$$

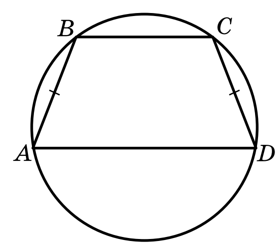


2. В любой трапеции следующие точки лежат на одной прямой:
   - середины оснований;
   - точка пересечения диагоналей;
   - точка пересечения продолжений боковых сторон.
3. Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам. Его длина l является **средним гармоническим оснований** трапеции a и b: $l = \dfrac{2ab}{a+b}$.



4. Около трапеции **можно описать окружность** тогда и только тогда, когда трапеция равнобокая:

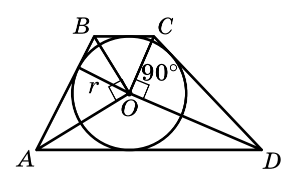
$$AB = CD.$$



5. В трапецию можно вписать окружность, если **сумма оснований равна сумме боковых сторон**, причём боковые стороны «видно» из центра вписанной окружности под **углом 90°.**

   Верно и обратное:

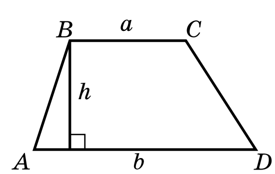
   Если в трапецию вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$ и отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны, перпендикулярны: $\angle AOB = \angle COD = 90°$.



Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

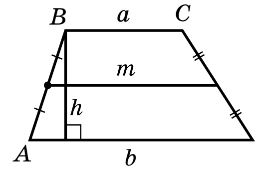


Следствия:

1. Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту:

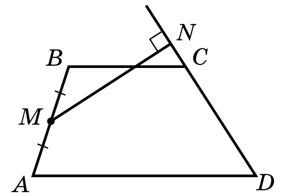
$$S_{\text{тр}} = m \cdot h,$$

где $m = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.



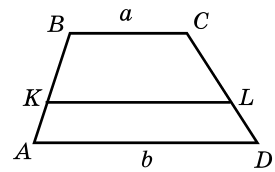
2. Площадь трапеции можно найти как произведение боковой стороны на длину перпендикуляра, опущенного на неё из середины другой боковой стороны:

$$S_{\text{тр}} = CD \cdot MN.$$



3. Пусть a и b — основания трапеции. Длина отрезка, параллельного основаниям с концами на боковых сторонах, который делит **площадь трапеции пополам**, равна:

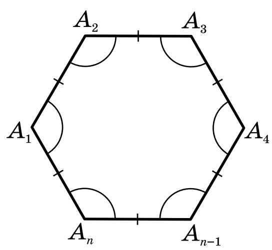
$$KL = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \quad S_{AKLD} = S_{KBCL}.$$

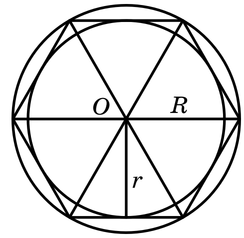


Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и все углы равны.

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \ldots = \angle A_{n-1} = \angle A_n; \; A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1.$$

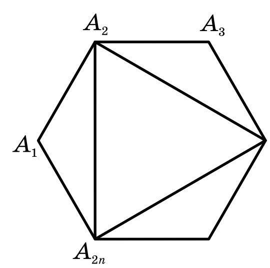




Теорема. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.

Эти окружности имеют один и тот же центр, который называется центром многоугольника. Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется **центральным углом** многоугольника.

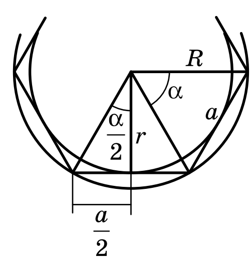
Вершины правильного $2n$-угольника, если их брать через одну, являются вершинами правильного n-угольника.



Формулы для радиусов вписанных и описанных правильных многоугольников

Найдём радиус R описанной окружности и r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$



Если обозначить S_n площадь правильного n-угольника, то связь между R, r, S_n и a приведём в таблице.

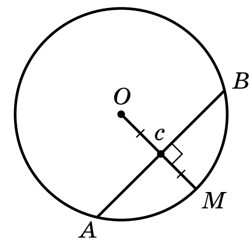
Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон через радиус R окружности формулой:

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 **24** 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Другие свойства правильных многоугольников

1. Любые два правильных n-угольника подобны друг другу. В частности, если у них стороны равны, то n-угольники тоже равны.
2. Диагонали правильного шестиугольника, проходящие через его центр, разбивают его на шесть правильных треугольников.
3. Сумма расстояний от любой точки внутри правильного многоугольника до его сторон (или их продолжений) не зависит от положения точки:
$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \text{const}.$$
4. **Теорема Брианшона.** Если **шестиугольник** описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.
5. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного в окружность **треугольника.**



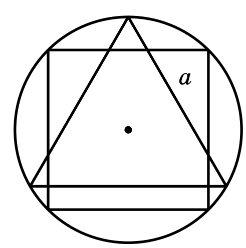
6. У правильных n-угольников отношения периметров и радиусов вписанных и описанных окружностей равны:
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Количество сторон	Зависимость a_n от R и n	Зависимость a_n от r и n
n	$a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$

Пример 1. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность.

Решение. Связь между сторонами правильного треугольника и четырёхугольника выражается формулами:
$$a_3 = R\sqrt{3};\quad R = \frac{a}{\sqrt{3}};\quad a_4 = R\sqrt{2}.$$



Подставим значение R, получим: $a_4 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

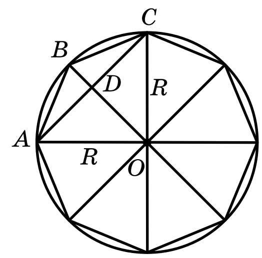
Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Пример 2. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле: $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.

Решение. Пусть AB — сторона правильного восьмиугольника, $AO = BO = CO = R$ — радиус описанной окружности, тогда $AC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ (из ΔAOC).

ΔAOD — прямоугольный.

$BO \perp AC$ и $\angle DOA = \angle OAD = 45°$, $DO = AD$. $AD = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ и $DO = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.



Найдём BD. $BD = R - DO$. $BD = R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2R - R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R(2-\sqrt{2})}{2}$.

ΔABD — прямоугольный, по теореме Пифагора:

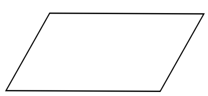
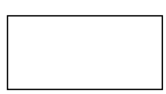
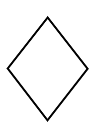
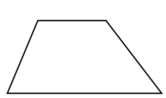
$$AB^2 = BD^2 + AD^2;\; AB = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R(2-\sqrt{2})}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{R^2}{4}(2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2)} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 4 \cdot (2-\sqrt{2})}{4}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Ответ: $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните таблицу:**

Многоугольник	**Площадь**
	
	
	
	

Ответы на тестовые задания к неделе 24

1 — 13. **2** — 12. **3** — 8. **4** — 8. **5** — 2700. **6** — 10. **7** — 9. **8** — 11; 22.

НЕДЕЛЯ 25

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

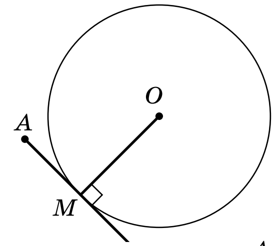
5.1. Планиметрия
- 5.1.4. Окружность и круг
- 5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

5.5. Измерение геометрических величин
- 5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

ОКРУЖНОСТЬ

Касательная к окружности и её свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга

Касательная к окружности, секущая



Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной к окружности.

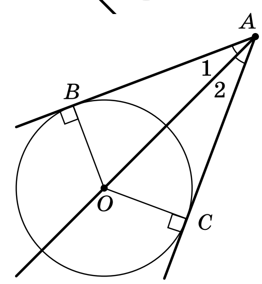
Эта общая точка (точка M) называется **точкой касания.**

Длиной касательной, проведённой из точки A к окружности с точкой касания M, является отрезок AM.

Свойства касательной

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу (диаметру), проведённому в точку касания:

$$OC \perp AC;\ OB \perp AB.$$



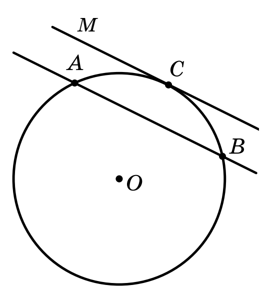
2. Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных равны:

$$AB = AC.$$

Биссектриса угла между этими касательными проходит через центр окружности. AO — биссектриса $\angle BAC$.

3. Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам:

$$\text{если } MC \parallel AB, \text{ то } \cup AC = \cup BC.$$

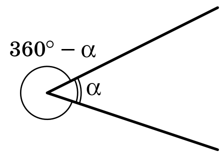


Если прямая имеет **две общие** точки с окружностью, то говорят, что прямая и окружность пересекаются. В таком случае прямую называют **секущей.**

Свойство секущей: если прямая проходит через точку, внутреннюю относительно окружности (т. C), то она пересекает окружность в двух точках, т. е. является секущей.

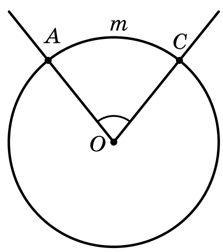
Центральный и вписанный углы

Угол разбивает плоскость на две части, каждая из которых называется **плоским** углом. Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными.**



Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре.

Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу.

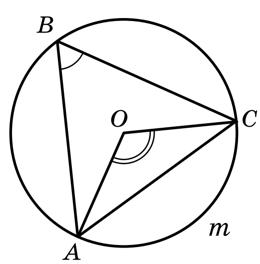


Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Иначе говорят, что центральный угол измеряется дугой окружности:

$$\cup AmC = \angle AOC.$$

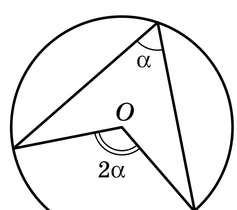
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность.**

$\angle ABC$ вписан в окружность. Его вершина B лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и C.



$\angle ABC$ и $\angle AOC$ **опираются** на дугу AmC (или на хорду AC). Говорят: хорда AC **стягивает** $\angle AOC$ (или $\cup AmC$), или хорду AC **видно** из точки O под углом AOC.

Теорема 1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.



Следствия

1. Все вписанные углы, опирающиеся на **одну и ту же хорду** и лежащие по одну сторону от неё (или опирающиеся на одну и ту же **дугу**), **равны.**

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат на окружности, *AB* — диаметр окружности, величина угла *DCB* равняется 43°. Найдите величину угла *ABD*.

____

2. Через точку *A*, находящуюся вне окружности, проведена прямая, которая пересекает данную окружность в точках *K* и *B*, причём *AK* = 8 см, *AB* = 32 см. Найдите расстояние от точки *A* до центра данной окружности, если её радиус равен 12 см.

____

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника — 6 см, высота, проведённая к основанию, равна 4 см. Найдите разность между площадью круга, ограниченного окружностью, описанной около данного треугольника, и длиной этой окружности. В ответ запишите результат, поделённый на π.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) в него окружностей.

($R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$,

где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь треугольника.)

____

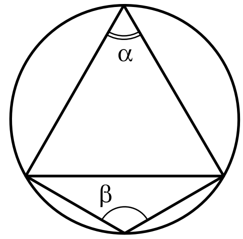
5. В круговой сектор, градусная мера дуги которого равна 60°, вписана окружность радиуса 6 см. Найдите площадь сектора. Ответ округлить до сотых.

____

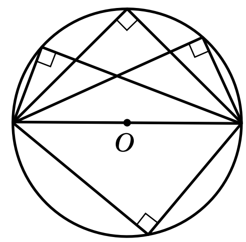
ДЛЯ ЗАМЕТОК

2. Если два вписанных угла опираются на одну и ту же хорду, а их вершины лежат по разные стороны от хорды, то сумма этих углов равна 180°:

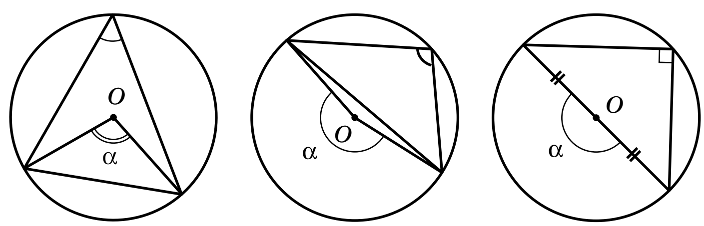
$$\alpha + \beta = 180°.$$



3. Все **углы,** опирающиеся на **диаметр**, — **прямые.**



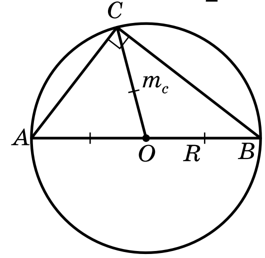
4. Центр окружности, описанной около **остроугольного** треугольника, лежит внутри треугольника; около **тупоугольного** треугольника — вне треугольника; около **прямоугольного** треугольника — на середине гипотенузы.



$\alpha < 180°$ $\alpha > 180°$ $\alpha = 180°$

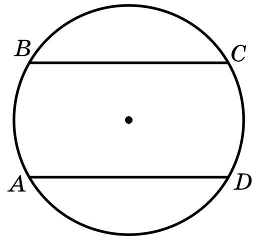
5. **Медиана** прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два равнобедренных треугольника и равна половине гипотенузы и радиусу описанной окружности:

$$AO = BO = CO = \frac{1}{2}AB.$$



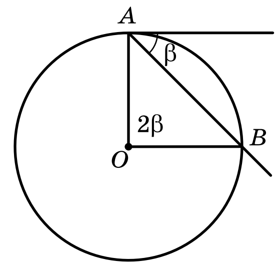
6. Градусные меры дуг окружности, расположенных между двумя параллельными хордами, **равны**:

$$\cup AB = \cup CD.$$



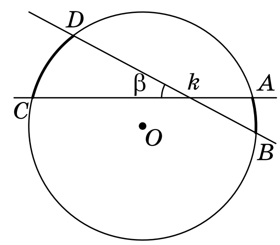
Теорема 2. Угол, образованный касательной и хордой, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой:

$$\beta = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \angle AOB.$$



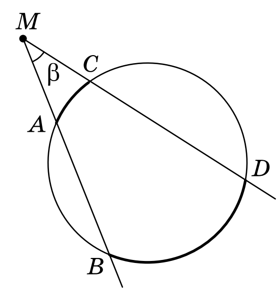
Теорема 3. Угол, образованный пересекающимися хордами, с вершиной внутри окружности, равен полусумме соответствующих дуг:

$$\beta = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup DC).$$



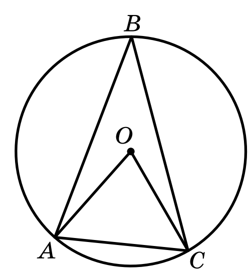
Теорема 4. Угол, образованный секущими к окружности, с вершиной вне окружности, равен полуразности соответствующих дуг.

$$\beta = \frac{1}{2}(\cup BD - \cup AC).$$



Пример. Точки A, B и C лежат на окружности. Чему равен $\angle ABC$, если хорда AC равна радиусу окружности?

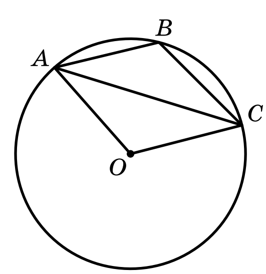
Случай 1. Хорда AC и вершина вписанного угла лежат по разные стороны от центра окружности.



Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. $AC = AO = OC = R$, ΔAOC — равносторонний, $\angle AOC = 60°$, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30°$.

Ответ: 30°.

Случай 2. Хорда AC и вершина вписанного угла лежат по одну сторону от центра окружности.

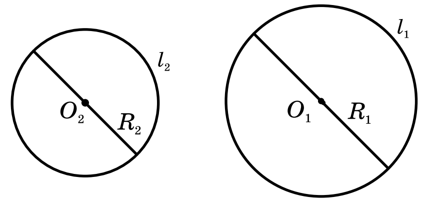


Тогда $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC$;

$\angle AOC = 180° - 30° = 150°$.

Ответ: 150°.

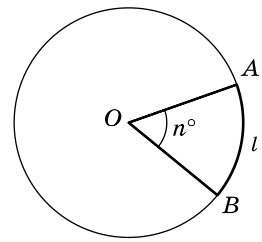
Длина окружности. Радианная мера угла



Окружность иногда рассматривают как правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон.

Отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей:

$$\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \pi \ \ (\pi \approx 3{,}14).$$



Длина окружности равна:

$$l = 2\pi R \text{ или } l = \pi \cdot D,\ D = 2R.$$

Длина дуги окружности вычисляется по формуле:

$$l_{\cup} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ,$$

n° — градусная мера угла; $l = \alpha R$, где α — радианная мера угла.

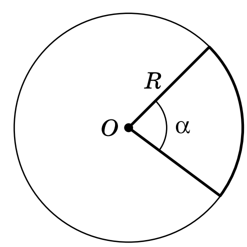
Радианную меру угла получают из градусной умножением на $\frac{\pi}{180^\circ}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$, где α — радианная мера угла, а n° — градусная мера угла.

Единицей радианной меры дуги является угол в 1 радиан.

Угол в 1 радиан — это центральный угол, у которого **длина дуги равна радиусу**.

Градусная мера угла в 1 радиан равна примерно $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Площадь круга и его частей



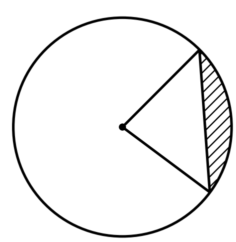
Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки **не больше** данного. Эта точка называется **центром круга**, данное расстояние — **радиусом круга**. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус:

$$S = \frac{1}{2}(2\pi R) \cdot R;\ \ S = \pi R^2 \text{ или } S = \frac{\pi d^2}{4},$$

где $d = 2R$ — диаметр окружности.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.



Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ,$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла, или

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha R^2}{2},$$

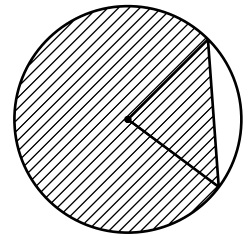
где α — радианная мера центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости.

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_{\Delta},$$

где n° — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «–» надо брать, когда $n^\circ < 180^\circ$, а знак «+» надо брать, когда $n^\circ > 180^\circ$.



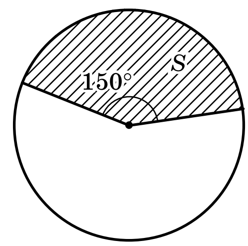
Если $n^\circ = 180^\circ$, то площадь полукруга $S_{\text{п/кр}} = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

Поскольку $\sin(360^\circ - n^\circ) = \sin(2\pi - \alpha)$, $-\sin n^\circ = -\sin\alpha$, то площадь указанного треугольника $S_\Delta = \pm\dfrac{1}{2}R^2\sin\alpha$, и эта формула имеет вид:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{180^\circ}\cdot n^\circ - \sin n^\circ\right) \text{ или } S_{\text{сегм}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha),$$

где n° — градусная мера угла, α — радианная мера угла.

Пример. Найдите площадь сектора радиуса R, если соответствующий ему центральный угол равен 150°.



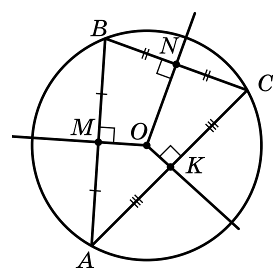
Решение. $S = \dfrac{\pi R^2\cdot n^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi R^2\cdot 150^\circ}{360^\circ} = \dfrac{5\pi R^2}{12}$.

Ответ: $S = \dfrac{5\pi R^2}{12}$.

Окружность, описанная около треугольника

Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведённых через середины этих сторон.



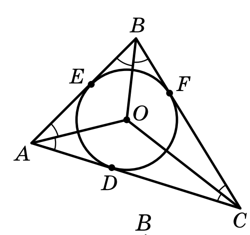
Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

$BN = NC$; $KC = KA$; $BM = MA$; $OM \perp AB$; $ON \perp BC$; $OK \perp AC$

Окружность, вписанная в треугольник

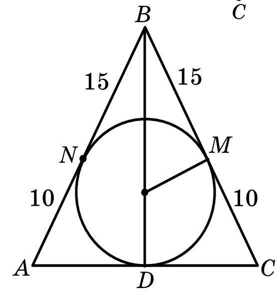
Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.



В **любой треугольник** можно вписать **окружность,** и только **одну.**

Пример. Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки 15 и 10 см, считая от вершины. Найдите периметр треугольника.



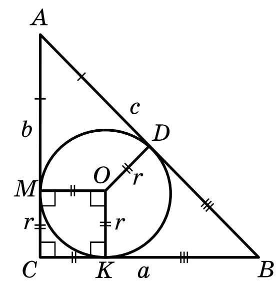
Решение: ΔABC — равнобедренный, значит, $BM = BN = 15$ см; $NA = MC = 10$ см. По свойству касательных, выходящих из одной точки, $CM = CD = 10$ см и $AD = AN = 10$ см.

Тогда имеем:

$AB = BC = 25$ см; $AC = 20$ см; $P = 2AB + AC = 2\cdot 25 + 20 = 70$ см.

Ответ: 70 см.

Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник



В **прямоугольном треугольнике:**

$$OK = OM = OD = r\ (OKCM\ —\ \text{квадрат}).$$

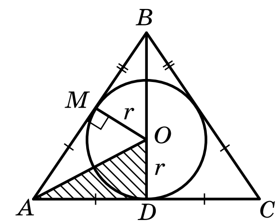
Сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей:

$$a + b = 2R + 2r$$

или

$$r = \frac{a+b-c}{2},\ \text{т. к.}\ R = \frac{c}{2},$$

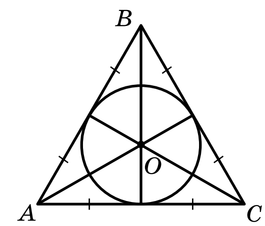
r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности.



В **равнобедренном треугольнике:** центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на медиане, высоте и биссектрисе, проведённой к основанию. Кроме того:

$$AO\ —\ \text{биссектриса}\ \angle A;$$

$$OD = OM = r.$$

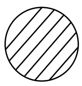
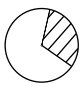
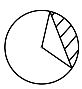


В **равностороннем треугольнике** центры окружности, **описанной** около равностороннего треугольника, и окружности, **вписанной** в него, **совпадают**. Это точка пересечения медиан, биссектрис и высот этого треугольника, которую называют **центром** равностороннего треугольника.

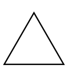
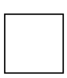
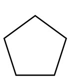
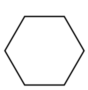
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 **25** 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

♦ **Заполните таблицу:**

Части круга	Название	Площадь
	______________________	
	______________________	
	______________________	

♦ **Заполните таблицу для радиусов вписанной и описанной окружностей:**

Фигура	R	r
		
		
		
		

Ответы на тестовые задания к неделе 25

1 — 47. **2** — 20. **3** — 11,25. **4** — 12; 29. **5** — 169,65.

НЕДЕЛЯ 26

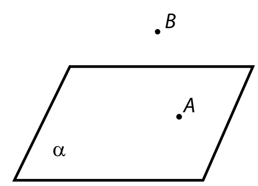
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.2. Прямые и плоскости в пространстве
- 5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых
- 5.2.2. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства
- 5.2.3. Параллельность плоскостей, признаки и свойства
- 5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах
- 5.2.5. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства
- 5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

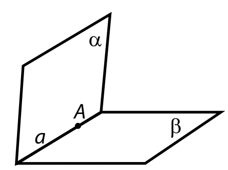
ГЕОМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

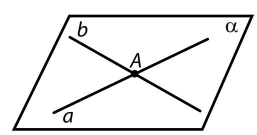
1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей. Точка A лежит в плоскости α (или принадлежит плоскости α), а точка B находится вне плоскости α (или не принадлежит плоскости α). Коротко это записывается так: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.



2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Две различные плоскости, которые имеют общую точку, называются **пересекающимися**.

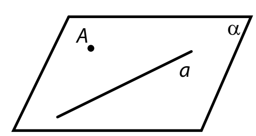


3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.



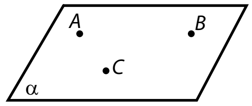
ТЕОРЕМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Теорема о существовании и единственности плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.



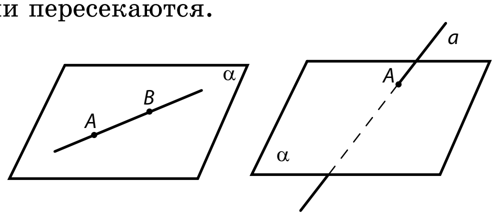
Теорема о существовании и единственности плоскости, проходящей через три точки. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Если A, B, C — точки, не лежащие на одной прямой, то плоскость, содержащая их, обозначается так: (ABC).



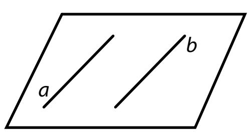
Теорема о принадлежности прямой плоскости. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Из этой теоремы следует, что прямая a может лежать в плоскости α (коротко это записывается так: $a \subset \alpha$), прямая a может не лежать в плоскости α (прямая имеет с плоскостью не более одной общей точки). Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Параллельность прямых a и b обозначается следующим образом: $a \parallel b$.

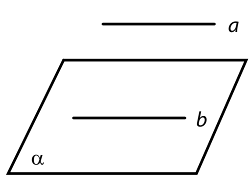


Теорема о единственности прямой, параллельной данной. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Признак параллельности прямых

Две прямые параллельные третьей прямой — параллельны: если $a \parallel b$, $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$.



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Плоскость α пересекает стороны AB и AC $\triangle ABC$ в точках B_1 и C_1 соответственно. $BC \parallel \alpha$. $B_1C_1 = 1$ см. $BB_1 : B_1A = 3:1$. Найдите BC.

2. Прямая a параллельна плоскости α. Через точки A и B прямой a проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника AA_1B_1B, если $A_1B_1 = 13$ см; $AA_1 = 14$ см; $A_1B = 15$ см.

3. Две параллельные плоскости α и β пересекают сторону BA угла ABC в точках D и D_1, а сторону BC — соответственно в точках E и E_1. Известно, что $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 15$ см. Найдите длину отрезка DE.

4. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 9 см. Найдите проекцию перпендикуляра на наклонную.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Из точки к плоскости проведен перпендикуляр длиной 12 и наклонная, проекция которой равна 5. Найдите проекцию перпендикуляра на наклонную. Ответ округлите до десятых.

6. Точка *M* находится на одинаковом расстоянии от всех сторон правильного треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ см и удалена от плоскости треугольника на 8 см. Найдите расстояние от точки *M* до сторон треугольника.

7. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, больший катет 6 см. Из вершины угла *B* проведён перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см к плоскости ΔABC. Найдите расстояние от точки *K* до *AC*.

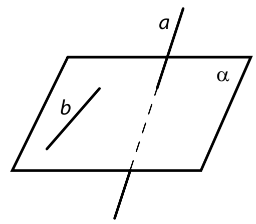
8. На изображении ромба *ABCD* построили изображение его высоты *BK*. Найдите отношение $AK : AD$, если угол ромба равен 60°.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости. Если $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости. Прямые a и b скрещивающиеся, это обозначается так: $a \div b$.



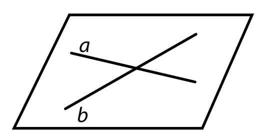
Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые — скрещивающиеся.

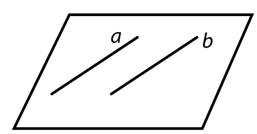
Два отрезка называются **скрещивающимися**, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Две прямые в пространстве могут:

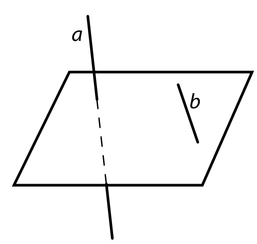
1) пересекаться, т. е. иметь одну общую точку;



2) быть параллельными, т. е. лежать в одной плоскости и не пересекаться;

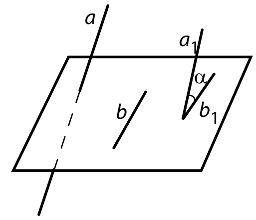


3) быть скрещивающимися, т. е. не лежать в одной плоскости.

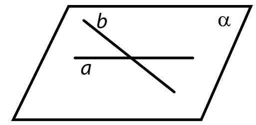


Углом между двумя пересекающимися прямыми называется угловая мера меньшего угла, образованного этими прямыми. Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$, где α — угол между двумя пересекающимися прямыми. Угол между параллельными прямыми считают равным нулю.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым. (Угол между скрещивающимися прямыми a и b равен α, так как угол между пересекающимися прямыми a_1 и b_1 равен α и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$.)

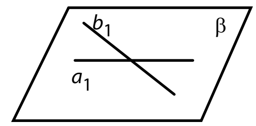


Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются. Плоскости α и β параллельны. Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$.



Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

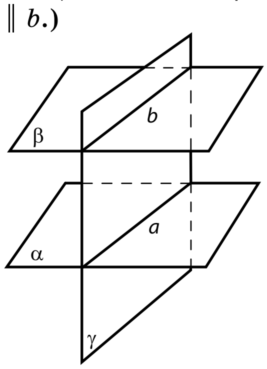
Если $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.



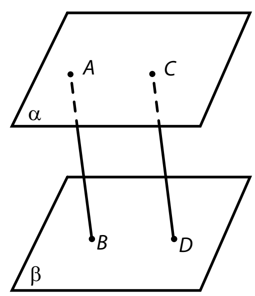
Единственность и существование плоскости, параллельной данной плоскости. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Свойства параллельных плоскостей

1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. ($\alpha \parallel \beta$, γ пересекает α по прямой a, γ пересекает β по прямой b, тогда $a \parallel b$.)



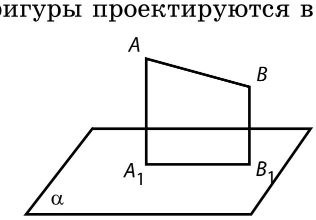
2. Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны. ($\alpha \parallel \beta$, $AB \parallel CD$, $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$, значит, $AB = CD$.)



Свойства параллельных проекций

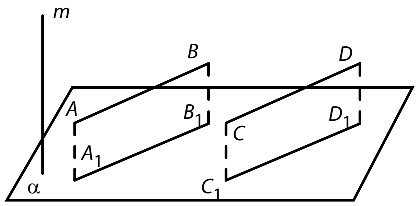
Предположим, что проектируемые прямые не параллельны проектирующей прямой. Тогда:

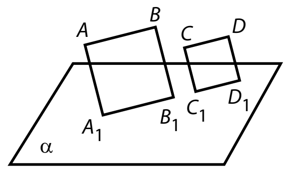
1) прямолинейные отрезки фигуры проектируются в отрезки;



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

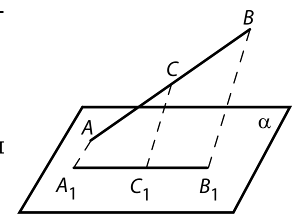
2) параллельные отрезки фигуры проектируются в параллельные отрезки или в отрезки одной прямой;





3) если точка делит отрезок, то параллельная проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же отношении:

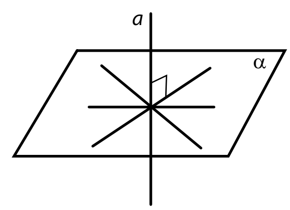
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1};$$



4) если два отрезка параллельны, то их параллельные проекции относятся, как эти отрезки:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

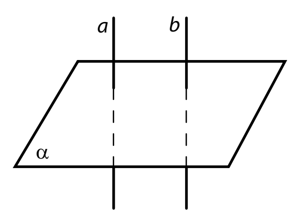
Перпендикулярность прямых и плоскостей



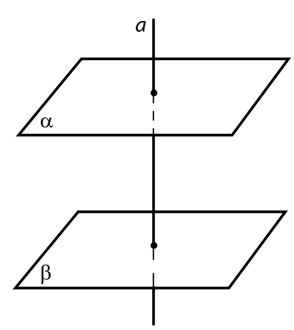
Прямая, которая пересекает плоскость, называется **перпендикулярной этой плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости



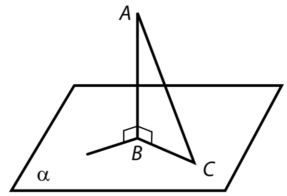
1. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то эти прямые параллельны: если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.
2. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой: если $\alpha \perp a$ и $a \parallel b$, то $b \perp a$.
3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой: если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$.
4. Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны: если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$.



Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.

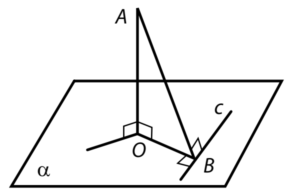
Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**.

Отрезок, который соединяет основания перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной на плоскость.** (AB — перпендикуляр к плоскости α. AC — наклонная к плоскости α. BC — проекция наклонной AC на плоскость α.)



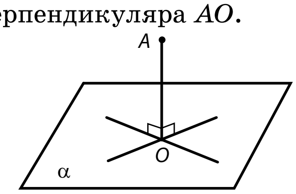
Если из данной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной.

Теорема о трёх перпендикулярах. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной. И обратно: если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и самой проекции на эту плоскость. (AO — перпендикуляр, AB — наклонная, OB — проекция наклонной, c — прямая плоскости. Если $OB \perp c$, то $AB \perp c$ и обратно: если $c \perp AB$, то $OB \perp c$. Заметим, что прямая c может и не пересекаться с AB.)

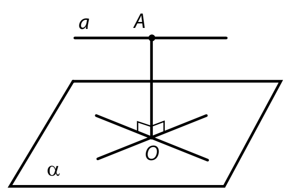


Расстояния между точками, прямыми и плоскостями

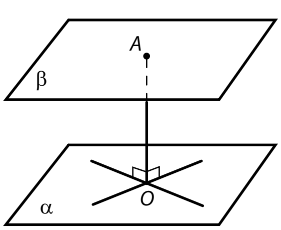
Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Расстоянием от точки A до плоскости α является длина перпендикуляра AO.



Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости. ($a \parallel \alpha$, $AO \perp \alpha$, значит, расстоянием от прямой a до плоскости α является длина перпендикуляра AO.)

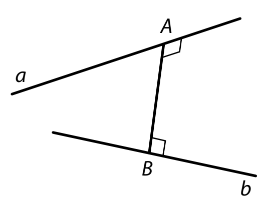


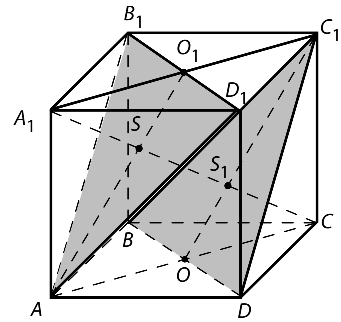
Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости. $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$, тогда расстоянием между плоскостями α и β является длина перпендикуляра AO.



Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (отрезка с концами на этих прямых, являющегося перпендикуляром к каждой из прямых).

Прямые a и b скрещивающиеся, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$, значит, расстоянием между прямыми a и b является длина отрезка AB.





Пример. Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, длина ребра которого равна a.

Решение: пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Найдём расстояние между прямыми AD_1 и DC_1. Через прямые AD_1 и D_1B_1 проводим плоскость AD_1B_1. Через прямые DC_1 и BD проводим плоскость BDC_1. Плоскости AD_1B_1 и BDC_1 параллельны. Следовательно, расстояние между прямыми AD_1 и DC_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями AD_1B_1 и BDC_1. Так как A_1C — наклонная к плоскости ABC, а AC — проекция этой наклонной и $AC \perp BD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C \perp BD$. Так как A_1C — наклонная к плоскости CDD_1, а CD_1 — проекция этой наклонной и $CD_1 \perp DC_1$, то $A_1C \perp DC_1$. Так как $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp DC$, то $A_1C \perp (BDC_1)$. Значит, расстояние между плоскостями BDC_1 и B_1D_1A равно SS_1 (где S и S_1 — точки пересечения диагонали A_1C куба с плоскостями AD_1B_1 и BDC_1). Из сечения AA_1C_1C имеем:

$$SS_1 = \frac{1}{3}A_1C = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(AD^2 + DC^2) + AA_1^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + a^2) + a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

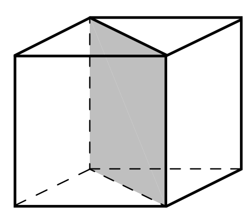
ПОСТРОЕНИЯ В СТЕРЕОМЕТРИИ

В стереометрии **изображением фигуры** называют любую фигуру, подобную параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

Решение задач на построение в пространстве отличается от решения задач на построение на плоскости. При решении задач на построение в пространстве описывается и логически обосновывается ход построения, который сопровождается схематическими рисунками.

Плоскость считается построенной, если указаны элементы, определяющие её положение (три точки, не лежащие на одной прямой; прямая и точка, лежащая вне прямой; две пересекающиеся или две параллельные прямые).

Линия пересечения плоскостей считается построенной, если определены пересекающиеся плоскости.

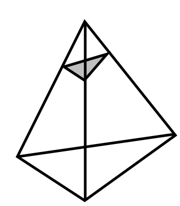


В плоскости, которая определена, можно выполнить все построения, пользуясь методами, изученными в планиметрии.

Сечением тела называется часть секущей плоскости, ограниченной линиями пересечения этой плоскости с поверхностью тела.

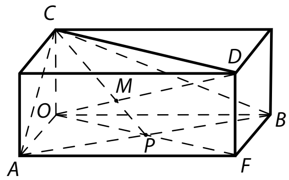
При построении сечения тела необходимо:

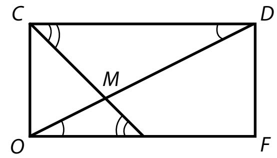
1) определить положение секущей плоскости;
2) найти линию пересечения секущей плоскости с поверхностью тела.



Пример 1. Через концы трёх рёбер OA, OB, OC прямоугольного параллелепипеда проведена плоскость ABC. Диагональ OD параллелепипеда пересекает эту плоскость в точке M. Доказать, что $OM = \frac{1}{3}OD$.

Доказательство. Пусть P — середина отрезка AB. Поскольку $\Delta DMC \sim \Delta OMP$, то $\frac{PM}{MC} = \frac{OM}{MD} = \frac{OP}{DC} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $MD = 2 \cdot OM$ и, значит, $OD = 3 \cdot OM \Leftrightarrow OM = \frac{1}{3}OD$.



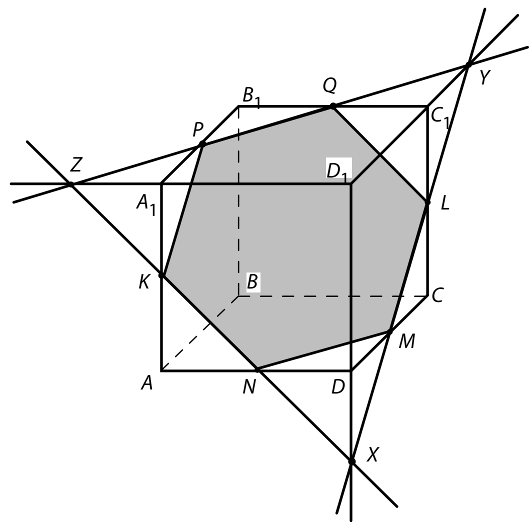


Ответ: утверждение доказано.

Пример 2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины K, L, M рёбер AA_1, CC_1, DC.

Построение. Секущая плоскость α определяется точками K, L, M, не лежащими на одной прямой.

Найдём прямые, по которым α пересекает плоскости граней куба. L и M — общие точки плоскости α и плоскости грани DCC_1D_1, следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ML. Прямые LM и DD_1, LM и D_1C_1 лежат в плоскости DD_1C_1C, прямые LM и DD_1 пересекаются в точке X, прямые LM и D_1C_1 — в точке Y.



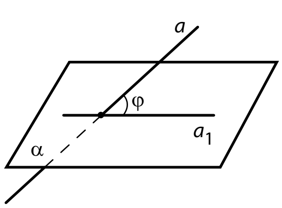
Точки X и K — общие точки плоскости a и плоскости грани DD_1A_1A, они определяют прямую KX, которая пересекает прямую A_1D_1 в точке Z, а ребро AD в точке N.

Точки Y и Z принадлежат плоскости α и плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$. Прямая YZ пересекает рёбра A_1B_1 и B_1C_1 в точках P и Q. Итак, искомое сечение — $PQLMNK$.

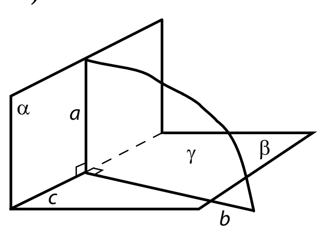
Ответ: сечение построено.

УГЛЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость. Если φ — угол между прямой и плоскостью, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

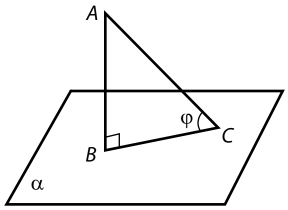


Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. ($\alpha \perp \beta$, так как $\gamma \perp c$ и $a \perp b$.)

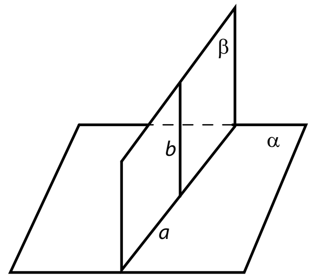


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на данную плоскость. Если φ — угол между наклонной и плоскостью, то $0° < \varphi < 90°$.



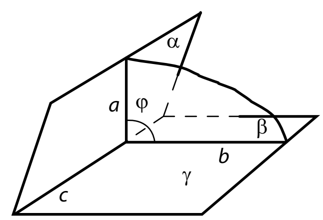
Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны. (Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$.)



Свойства перпендикулярных плоскостей:

1. Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. Если $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp c$, то $a \perp b$.
2. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости. Если $\beta \perp \alpha$, $b \perp a$, то $b \perp a$.

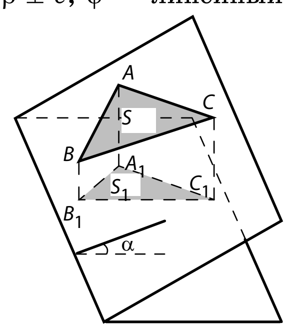
Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.



Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми пересечения данных плоскостей с плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения данных плоскостей. Если $\gamma \perp c$, то φ — угол между плоскостями, $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются **гранями**, а ограничивающая их прямая — **ребром** двугранного угла.

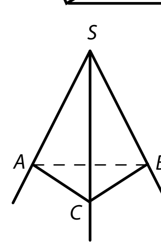
Линейным углом двугранного угла называется угол между лучами, по которым плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает грани. ($\beta \perp c$, φ — линейный угол двугранного угла, $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.)



Ортогональным (или **прямоугольным**) **проектированием** называется параллельное проектирование, при котором проектируемые прямые перпендикулярны к плоскости проекции.

Теорема. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S = S_1 \cos \alpha$.

Трехгранным углом ($SABC$) называется фигура, составленная из трёх плоских углов (ASB, BSC и CSA). Эти углы называются гранями трёхгранного угла, а их стороны — рёбрами. Общая вершина плоских углов называется **вершиной трёхгранного угла**.

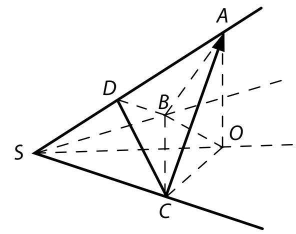


Многогранным углом $SA_1A_2A_3 \ldots A_n$ называется фигура, составленная из n плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, A_3SA_4, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1. S — вершина; SA_1, SA_2, …, SA_n — рёбра, $\angle A_1SA_2$, $\angle A_2SA_3$, …, $\angle A_nSA_1$ — грани многогранного угла. В зависимости от числа граней различают трёхгранные, четырёхгранные и прочие углы.

П р и м е р. В трёхгранном угле два плоских угла — по 45°, а третий плоский угол равен 60°. Найти двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

Решение: пусть $SABC$ — данный трёхгранный угол,

$\angle ASB = \angle ASC = 45°$, $\angle BSC = 60°$.



Через точку D ребра SA проведём $DB \perp SA$, $DC \perp SA$. $\Delta DSB = \Delta DSC$ (по катету и прилежащему острому углу: SD — общий, $\angle DSB = \angle DSC = 45°$) и, значит, $SB = SC$ и $DB = DC$. Пусть $SD = x$, тогда из ΔSDC: $DC = x$, $SC = \dfrac{SD}{\cos 45°} = x\sqrt{2}$. ΔBSC — правильный и, значит, $BC = x\sqrt{2}$.

Далее, из ΔBDC по теореме косинусов:

$$BC^2 = DC^2 + DB^2 - 2DC \cdot DB \cdot \cos\angle BDC \Rightarrow \cos\angle BDC = \frac{DC^2 + DB^2 - BC^2}{2 \cdot DC \cdot DB} = \frac{x^2 + x^2 - 2x^2}{2 \cdot x \cdot x} = 0.$$

Значит, $\angle BDC = \arccos 0 = 90°$.

Ответ: 90°.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Запишите свойства параллельных проекций:**

1. ______________________________

____

____

2. ______________________________

____

____

3. ______________________________

____

____

4. ______________________________

____

____

Ответы на тестовые задания к неделе 26

1 — 4. **2** — 168. **3** — 10. **4** — 4. **5** — 11,1. **6** — 10. **7** — 6. **8** — 0,5.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 **26** 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 27

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.3. Многогранники

- 5.3.1. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма
- 5.3.2. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде

5.5. Измерение геометрических величин

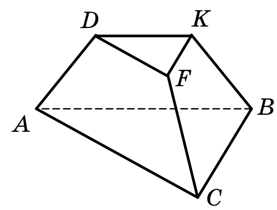
- 5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

МНОГОГРАННИКИ

Многогранником называется тело, поверхность которого ограничена конечным числом плоских многоугольников.

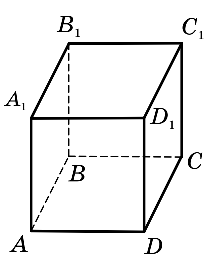
Многоугольники, ограничивающие поверхность тела, называются **гранями**, стороны граней называются **рёбрами**, вершины граней называются **вершинами** многогранника.

На рисунке изображён многогранник $ABCDKF$; ABC, $ADFC$, $CFKB$, $ABKD$, DKF — грани; AB, BC, AC, AD, FC, KB, DF, DK, KF — рёбра; A, B, C, D, K, F — вершины.

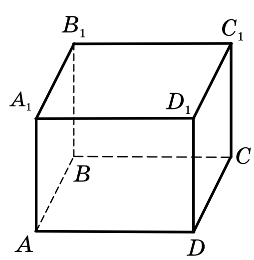


Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей его граней:

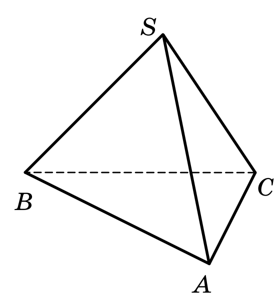
$$S = S_{ABC} + S_{ADFC} + S_{CFKB} + S_{ABKD} + D_{DKF}.$$



Куб — это многогранник, поверхность которого ограничена шестью равными квадратами.



Прямоугольный параллелепипед — это многогранник, поверхность которого ограничена шестью прямоугольниками.



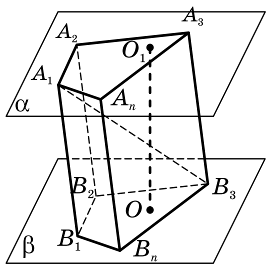
Тетраэдр — это многогранник, поверхность которого ограничена четырьмя треугольниками.

Призма

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников (оснований призмы), которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, которые соединяют соответствующие точки этих многоугольников.

Отрезки, соединяющие соответствующие вершины, называются **боковыми рёбрами призмы.**

Призма называется ***n*-угольной**, если основание — *n*-угольник.



$A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — **основания призмы;**

$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — **боковые грани призмы;**

A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — **боковые рёбра призмы.**

Боковая поверхность призмы состоит из боковых граней призмы.

Поверхность (полная поверхность) призмы состоит из оснований и боковой поверхности.

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания (**расстояние** между плоскостями оснований).

OO_1 — высота призмы.

Диагональ призмы — отрезок, соединяющий две вершины призмы, которые не принадлежат одной грани.

Например, A_1B_3 — диагональ призмы.

Призма, в основании которой лежат параллелограммы, называется **параллелепипедом.**

Свойства призмы

1. Основания призмы — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
2. Боковые рёбра призмы параллельны и равны.
3. Боковые грани призмы — параллелограммы.

Виды призм

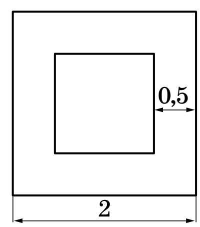
1. **Прямая призма** — это призма, все боковые рёбра которой перпендикулярны основаниям.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см. Определите длину бокового ребра призмы, если её полная поверхность равна 270 см^2.

2. Дана треугольная призма. Через середины двух рёбер её основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру призмы. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 16 см^2. Найдите площадь боковой поверхности данной призмы.

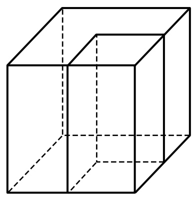
3. Труба имеет форму правильной четырёхугольной призмы, ребро основания которой равно 2, а длина трубы — 5. Найдите площадь поверхности трубы, если толщина её стенок равна 0,5.



ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

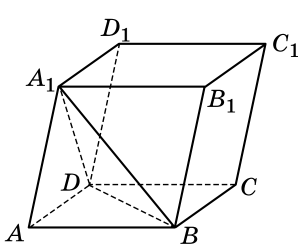
4. От куба, ребро которого равно $2a$, отрезали прямоугольный параллелепипед высотой $2a$ и с ребром в основании a, как показано на рисунке. Во сколько раз площадь поверхности куба больше площади поверхности параллелепипеда?



5. В кубе провели секущую плоскость через середины смежных сторон нижнего основания и наиболее удалённую вершину верхнего основания. Найдите тангенс угла наклона образовавшегося сечения к основанию. Ответ округлите до сотых.

6. Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра. Во сколько раз объём куба больше объёма октаэдра?

7. Объём четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 48. Найдите объём треугольной пирамиды $ABDA_1$.



Свойства прямой призмы:

1) Основания прямой призмы — равные многоугольники, которые лежат в параллельных плоскостях.
2) Боковые рёбра прямой призмы параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований, т. е. являются высотами призмы. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.
3) Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Плоскости боковых граней перпендикулярны плоскостям оснований.

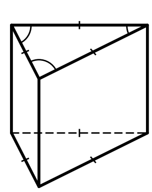
Параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны основанию, называют **прямым.** Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется **прямоугольным.** Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называется **кубом.**

2. **Наклонная призма** — призма, у которой боковые рёбра не перпендикулярны плоскостям оснований.
3. **Правильная призма** — прямая призма, основания которой — правильные многоугольники. Очевидно, что все свойства прямой призмы справедливы и для правильной призмы.

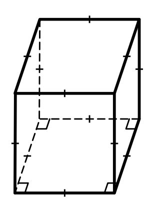
Свойства правильной призмы:

1. Боковые грани правильной призмы — равные прямоугольники.
2. Площадь боковой поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и высотой h вычисляется по формуле:

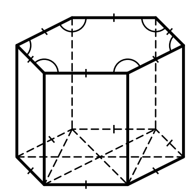
$$S_{\text{бок}} = n \cdot a \cdot h.$$



правильная треугольная призма



правильная четырёхугольная призма

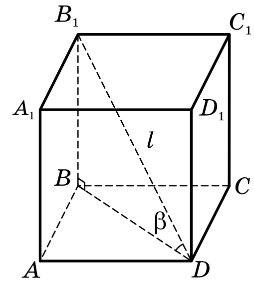


правильная шестиугольная призма

Пример 1. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, её основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты, боковые рёбра перпендикулярны основаниям. Так как $B_1B \perp (ABCD)$, то BD — проекция диагонали

B_1D призмы на плоскость основания. Тогда $\angle B_1DB$ — угол, образованный этой диагональю с плоскостью $(ABCD)$.



По условию: $\angle B_1DB = \beta$; $B_1D = l$. $S_{бок} = P_{ABCD} \cdot B_1B$.

Из ΔB_1BD ($\angle B_1BD = 90°$, т. к. $B_1B \perp ABCD$):
$B_1B = B_1D \sin\angle B_1DB = l\sin\beta$; $BD = B_1D\cos\angle B_1DB = l\cos\beta$.

Из ΔABD ($\angle BAD = 90°$): $AB^2 + AD^2 = BD^2$, а т. к. $AB = AD$, то $2AB^2 = BD^2 = l^2\cos^2\beta$; $AB = \dfrac{l\cos\beta}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}l\cos\beta}{2}$.

$$S_{бок} = 4 \cdot AB \cdot B_1B = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}l\cos\beta}{2} \cdot l\sin\beta = \sqrt{2}l^2\sin 2\beta.$$

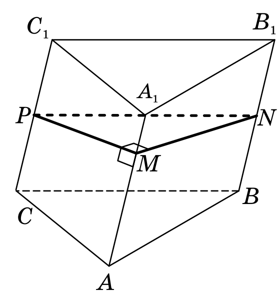
Ответ: $\sqrt{2}l^2\sin 2\beta$.

Площадь боковой и полной поверхности призмы. Объём призмы

	Наклонная призма	**Прямая призма**
Боковая поверхность	$S_{бок} = P_{пер} \cdot l$, где $P_{пер}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра	$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $P_{осн}$ — периметр основания, H — высота
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$
Объём	$V = S_{пер} \cdot l$ или $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{пер}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро	$V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ — площадь основания призмы, H — высота

П р и м е р 2. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 6 см, две боковые грани её взаимно перпендикулярны, и их площади равны 24 см^2 и 30 см^2. Найдите объём призмы.

Решение. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.



$S_{AA_1B_1B} = 24$ см^2, $S_{AA_1C_1C} = 30$ см^2, $A_1A = 6$ см.

Плоскости CAA_1 и BAA_1 перпендикулярны.

Проведём через точку $M \in A_1A$ плоскость, перпендикулярную AA_1. Она пересекает прямые C_1C и B_1B, параллельные прямой A_1A, в точках P и N. Линии пересечения секущей плоскости с плоскостями боковых граней образуют ΔMPN.

Т. к. $A_1A \perp (PMN)$, а прямые MP и MN лежат в плоскости PMN, то $A_1A \perp MP$ и $A_1A \perp MN$, значит, $\angle PMN$ — линейный угол двугранного угла при ребре A_1A. По условию $\angle PMN = 90°$. $V = S_{\Delta PMN} \cdot A_1A$.

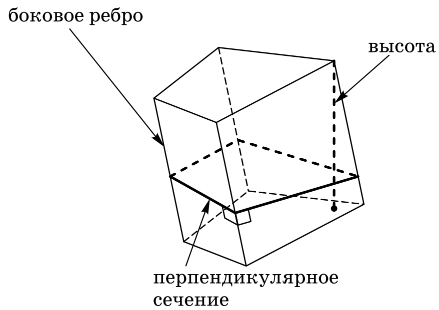
$S_{AA_1B_1B} = A_1A \cdot MN$, т. к. боковая грань AA_1B_1B — параллелограмм со стороной A_1A и высотой MN. Тогда $6 \cdot MN = 24$; $MN = 4$ (см). Аналогично $S_{AA_1C_1C} = A_1A \cdot MP$, $6 \cdot MP = 30$; $MP = 5$ (см).

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10 \text{ (см}^2\text{)}. \quad V = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (см}^3\text{)}.$$

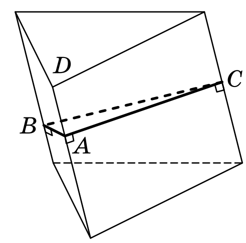
Ответ: 60 см^3.

Сечение призмы плоскостью

Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется её сечение плоскостью, которая пересекает все боковые рёбра и перпендикулярна им.



Построение перпендикулярного сечения в наклонной призме



1. Через точку A на боковом ребре проводим к этому ребру перпендикуляры AB и AC, которые лежат на двух смежных боковых гранях (иногда точку A берут на одной из вершин призмы).
2. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости доказываем перпендикулярность прямой DA и плоскости ABC.
3. Используя свойство параллельных прямых, перпендикулярных плоскости, доказываем, что ABC — искомое сечение.

   Если $n > 3$, построение производится аналогично.

Секущей плоскостью геометрического тела называется любая плоскость, по обе стороны от которой лежат точки данного тела.

Сечением геометрического тела называется фигура, состоящая из общих точек секущей плоскости и поверхности данного тела.

Основные правила построения сечений

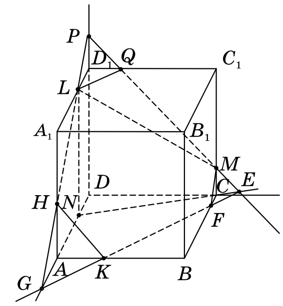
1. Если даны (или уже построены) две точки плоскости на одной грани многогранника, то след сечения — прямая, проходящая через эти точки.
2. Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, лежащая в данной грани, то необходимо определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (она будет точкой пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой гранью).
3. Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с её проекцией на плоскость основания.

Способы построения сечений

Способ соответствия состоит в том, что для построения сечений необходимо сначала построить те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно отвечают точкам искомого сечения.

Способ следов состоит в том, что в плоскости нижнего основания (иногда на некоторой другой плоскости) выполняется построение **следов** (линий и точек пересечения секущей плоскости, некоторых прямых). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника.

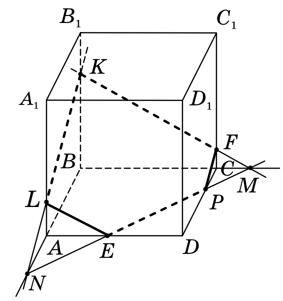
Пример 3. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через три заданные точки: $K \in AB$, $L \in A_1D_1$ и $M \in CC_1$.



Решение. Опустим из данной точки L перпендикуляр LN на AD. Проведём прямые LM и NC до их пересечения в точке E (эти прямые лежат в одной плоскости (LMN) и непараллельны, поэтому пересекутся в некоторой точке E).

Проведём прямую EK до пересечения с прямыми BC и AD соответственно в точках F и G. Проведём прямую GL до пересечения с прямыми AA_1 и DD_1 в точках H и P. Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получим точку Q. Точки L, Q, M, F, K и H последовательно соединим. Фигура $LQMFKH$ — искомое сечение.

Пример 4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через точки: $K \in B_1B$, $E \in AD$, $P \in DC$.



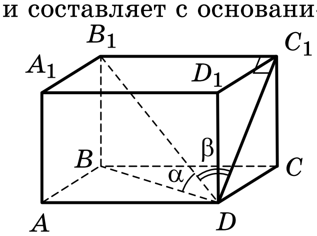
Решение. Для построения сечения необходимо построить точки пересечения плоскости (KEP) с гранями куба. Плоскость (KEP) с плоскостью ($ABCD$) пересекается по прямой PE.

Эта прямая пересекает плоскость BB_1C_1C в точке M, а плоскость AA_1B_1B — в точке N.

Теперь определим точки, лежащие на грани AA_1B_1B, т. е. проведём прямую через точки N и K, получим точку L на ребре AA_1, проведём прямую KM на грани BB_1C_1C, получим точку F — точку пересечения прямой KM с ребром CC_1. Сечение куба плоскостью (KEP) выполнено: это пятиугольник $ELKFP$.

Угол между прямой и плоскостью

Пример. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с основанием угол α, а с боковой гранью угол β. Найдите объём параллелепипеда.



Решение. Пусть $B_1D = d$. $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle B_1DC_1 = \beta$.

Из ΔB_1DB: $BB_1 = B_1D \sin\alpha = d \sin\alpha$, $BD = B_1D\cos\alpha = d\cos\alpha$.

Из ΔB_1C_1D: $B_1C_1 = B_1D \sin\beta = d\sin\beta = BC$. Из ΔBCD:

$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{BD^2 - B_1C_1^2} =$

$= \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Для объёма прямоугольного параллелепипеда имеем:

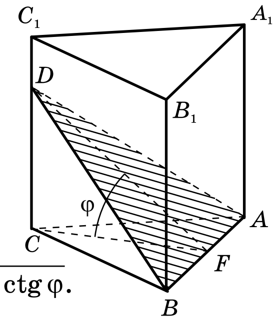
$$V = BB_1 \cdot BC \cdot CD = d\sin\alpha \cdot d\sin\beta \cdot d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Ответ: $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Угол между плоскостями

Пример. Через одну из сторон основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом φ к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объёмом V. Найдите площадь образовавшегося треугольного сечения.

Решение. Обозначим искомую площадь через S, площадь основания — через S_0, а сторону правильного ΔABC, лежащего в основании, — через a. Тогда $S = \dfrac{S_0}{\cos\varphi}$, причём



$S_0 = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Из ΔABC его высота равна: $CF = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного ΔCDF имеем: $CD = CF \cdot \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

По условию $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_0 \cdot CD$.

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3 \operatorname{tg}\varphi}{8} \Leftrightarrow a^3 = \frac{8V}{\operatorname{tg}\varphi} = 8V \cdot \operatorname{ctg}\varphi \Leftrightarrow a = 2 \cdot \sqrt[3]{V \cdot \operatorname{ctg}\varphi}.$$

Значит, $S = \dfrac{S_0}{\cos\varphi} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} : \cos\varphi = a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi} = (2 \cdot \sqrt[3]{V \cdot \operatorname{ctg}\varphi})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4\cos\varphi} =$

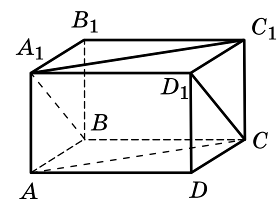
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2 \cos^2\varphi}{\cos^3\varphi \sin^2\varphi}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{\cos\varphi \sin^2\varphi}}.$$

Ответ: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\cos\varphi \sin^2\varphi}}$.

Угол между скрещивающимися прямыми

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны рёбра: $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AA_1 = a$. Чему равны углы между прямыми: 1) AB и CD_1; 2) AC и A_1B_1?

Решение. 1) Прямые AB и CD_1 — скрещивающиеся, тогда угол между ними равен углу между прямыми AB и BA_1, так как $CD_1 \parallel BA_1$. Из ΔAA_1B:



$$\operatorname{tg}\angle ABA_1 = \frac{AA_1}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \text{ следовательно, } \angle ABA_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

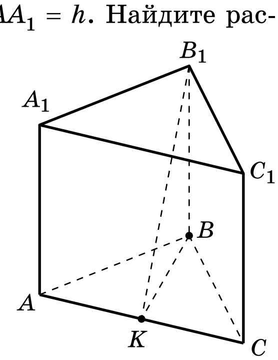
2) Прямые AC и A_1B_1 — скрещивающиеся, значит, угол между ними равен углу между пересекающимися прямыми A_1C_1 и A_1B_1, тогда из $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\operatorname{tg}\angle B_1A_1C_1 = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \frac{BC}{AB} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}, \text{ следовательно, } \angle B_1A_1C_1 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

Ответ: 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$.

Расстояние от точки до прямой

Пример. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = a$, $AA_1 = h$. Найдите расстояние от вершины B_1 до прямой AC.



Решение. Проведём $BK \perp AC$, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B_1K \perp AC$. Следовательно, B_1K — расстояние от вершины B_1 до прямой AC.

Из треугольника ABK имеем:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}.$$

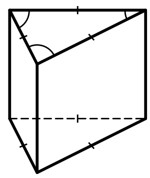
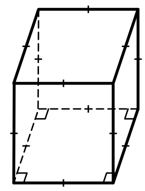
Из треугольника BB_1K имеем:

$$B_1K = \sqrt{BB_1^2 + BK^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните таблицу:**

		
$S_{\text{бок.}}$		
$S_{\text{полн.}}$		
V		

Ответы на тестовые задания к неделе 27

1 — 7. **2** — 32. **3** — 66. **4** — 2,4. **5** — 0,95. **6** — 6. **7** — 8.

НЕДЕЛЯ 28

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.3. Многогранники

5.3.3. Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида

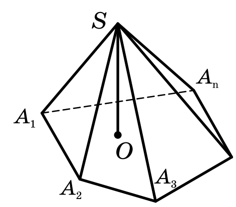
5.3.4. Сечения куба, призмы, пирамиды

5.3.5. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)

5.5. Измерение геометрических величин

5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

ПИРАМИДА

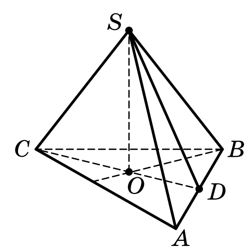


Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания. ($A_1A_2...A_n$ — основание пирамиды; ΔSA_1A_2, ΔSA_2A_3, ..., ΔSA_nA_1 — **боковые грани;** S — **вершина** пирамиды.)

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из её вершины к плоскости основания. (SO — высота пирамиды.)

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а основание высоты (проекция вершины) совпадает с центром этого многоугольника.

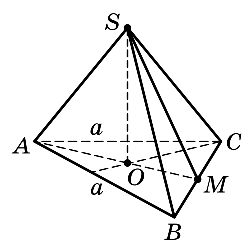


Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая высоту.

Апофемой называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины. ($SD \perp AB$, SD — апофема правильной треугольной пирамиды $SABC$.)

Замечание. Отрезок, соединяющий вершину правильной пирамиды с серединой ребра основания, — апофема. Все апофемы правильной пирамиды равны.

Некоторые виды правильных пирамид



Треугольная пирамида: ΔABC — правильный. O — точка пересечения медиан, высот, биссектрис, центр вписанной и описанной окружностей.

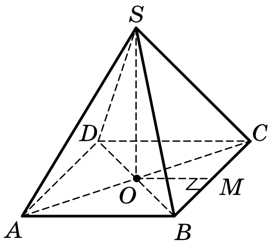
$$R = AO = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ r = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольная пирамида: $ABCD$ — квадрат. O — точка пересечения диагоналей, центр вписанной и описанной окружностей.

$$R = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r = OM = \frac{a}{2};$$

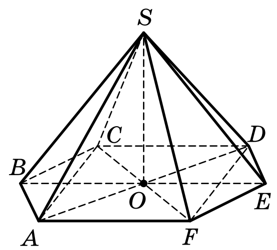
$$S_{ABCD} = a^2.$$



Шестиугольная пирамида: $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. O — центр вписанной и описанной окружностей.

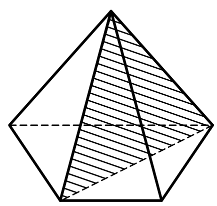
$$R = a; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$



Сечение пирамиды плоскостью

Диагональным сечением пирамиды называется сечение, которое проходит через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.



Сечение пирамиды плоскостью, **параллельной основанию,** — многоугольник, подобный многоугольнику основания.

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину, — треугольник.

Основные соотношения правильной пирамиды

$SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида.

$AB = BC = CD = DA = a$ — сторона основания.

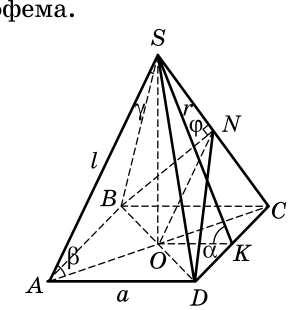
$\angle CDA = \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 90°$.

$SA = SB = SC = SD = l$ — боковое ребро.

$SO = H$ — высота; $SK = k$ — апофема.

$\angle SKO = \alpha$ — линейный угол двугранного угла при основании (угол наклона боковой грани к плоскости основания).

$\angle SAO = \beta$ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Все боковые рёбра равны и одинаково наклонены к основанию.



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Во сколько раз увеличится боковая поверхность правильной треугольной пирамиды, если стороны основания увеличить в 2 раза, а апофему — в 3 раза?

____

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Двугранный угол при основании равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

____

3. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

____

4. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 8 см, а плоский угол при вершине пирамиды 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. В кубе провели секущую плоскость через середины смежных сторон нижнего основания и наиболее удалённую вершину верхнего основания. Найдите тангенс угла наклона образовавшегося сечения к основанию. Ответ округлите до сотых.

____

6. В тетраэдре *DABC* проведена плоскость через медиану *CM* грани *ABC* параллельно ребру *AD*. Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно 4. Ответ округлите до десятых.

____

7. Перпендикулярно высоте тетраэдра проведена плоскость, отсекающая от него тетраэдр, площадь поверхности которого в 16 раз меньше площади поверхности данного тетраэдра. В каком отношении, считая от вершины, данная плоскость делит его высоту?

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

$\angle DSC = \gamma$ — плоский угол при вершине боковой грани.

$AO = R$ — радиус окружности, описанной около основания.

$OK = r$ — радиус окружности, вписанной в основание.

$ON \perp SC$, $\angle BND = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC.

$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SAD$; боковые грани — равные равнобедренные треугольники, которые одинаково наклонены к основанию.

Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды. Объём пирамиды

1. Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l = \frac{n}{2} al \quad \text{или} \quad S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha},$$

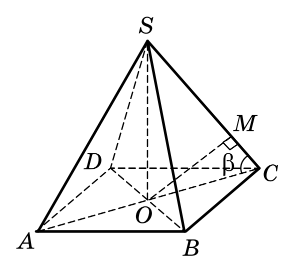
$\angle SKO = \alpha$ — угол наклона боковой грани к основанию.

2. Полная поверхность:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{n}{2} al + S_{\text{осн}}.$$

3. Объём:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$



Пример. Расстояние от основания высоты правильной четырёхугольной пирамиды до её бокового ребра равно a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найдите боковое ребро пирамиды.

Решение. $SO \perp (ABCD)$, OC — проекция бокового ребра на плоскость основания.

$\angle SCO = \beta$.

Проведём $OM \perp SC$. OM — расстояние от точки O до бокового ребра SC. $OM = a$.

Из ΔOMC ($\angle OMC = 90°$): $OC = \dfrac{OM}{\sin\angle SCO} = \dfrac{a}{\sin\beta}$.

Так как OC лежит в плоскости $ABCD$, а $SO \perp (ABCD)$, то $SO \perp OC$. Из ΔSOC ($\angle SOC = 90°$):

$$SC = \frac{OC}{\cos\angle SCO} = \frac{a}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{2a}{\sin 2\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{2a}{\sin 2\beta}$.

Соотношения между углами в правильной *n*-угольной пирамиде

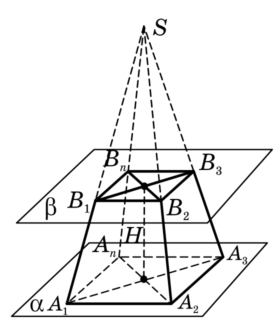
α — угол между боковым ребром и плоскостью основания;
β — угол между боковой гранью и плоскостью основания;
γ — угол между смежными боковыми рёбрами;
φ — угол между смежными боковыми гранями.

Углы	Соотношения	Связи между углами	Область изменения углов
$\alpha;\ \varphi$	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$		
$\alpha;\ \gamma$	$\cos\alpha = \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$	$\gamma < \pi - 2\alpha$	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$
$\alpha;\ \beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\frac{\pi}{n}$	$\alpha < \beta$	$0<\beta<\frac{\pi}{2}$
$\beta;\ \gamma$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$		$0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$
$\beta;\ \varphi$	$\sin\beta = \dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$	$\varphi > \pi - 2\beta$	$\pi-\frac{2\pi}{n}<\varphi<\pi$
$\gamma;\ \varphi$	$\cos\varphi = \dfrac{-\cos\frac{2\pi}{n}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$		

Усечённая пирамида

Усечённой пирамидой называется многогранник, который отсекается от пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей боковые рёбра, а также размещён между плоскостью основания и плоскостью сечения.

($A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — основания усечённой пирамиды; $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани; A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — боковые рёбра.)

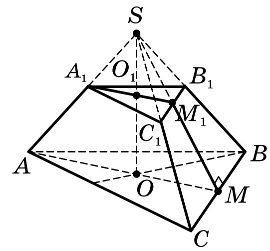


Высотой усечённой пирамиды называется перпендикуляр, проведённый из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Замечания.

1. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, пересекая её, отсекает подобную пирамиду.
2. Все боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

Правильная усечённая пирамида



Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена пересечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной её основанию.

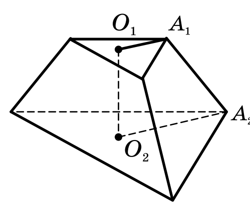
Свойства правильной усечённой пирамиды

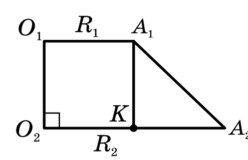
1. Основания — правильные многоугольники.
2. Боковые грани — равные равнобокие трапеции.
3. Отрезок, соединяющий центры оснований, — высота (OO_1 — высота).
4. Высота боковой грани называется апофемой (MM_1 — апофема).

Основные формулы для правильной усечённой пирамиды

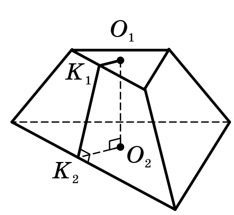
1. Площадь боковой поверхности:
$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l,$$
где P_1, P_2 — периметры оснований, l — апофема.
2. Площадь полной поверхности:
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2},$$
где $S_{\text{осн}_1}$ и $S_{\text{осн}_2}$ — площади оснований.
3. Объём произвольной усечённой пирамиды:
$$V = \frac{1}{3} H \left(S_{\text{осн}_1} + \sqrt{S_{\text{осн}_1} \cdot S_{\text{осн}_2}} + S_{\text{осн}_2} \right),$$
где H — высота пирамиды.

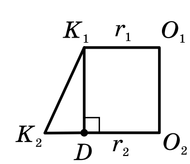
Решая задачи, в которых фигурируют **усечённые пирамиды,** полезно рассматривать при проведении вычислений фрагменты сечений пирамиды.





1. Фрагмент сечения, проходящего через боковое ребро и центры окружностей, описанных около оснований.
$$O_1O_2 = H,$$
$O_1A_1 = R_1$ и $O_2A_2 = R_2$ — радиусы описанных окружностей;
$$KA_2 = R_2 - R_1,$$
$\angle A_2$ — угол наклона бокового ребра к плоскости нижнего основания.



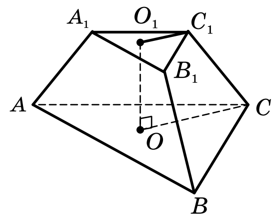


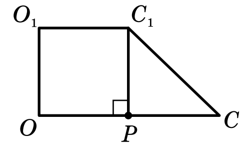
2. Фрагмент сечения, проходящего через центры окружностей, вписанных в основания (r_1 и r_2).
$$O_1O_2 = H,$$
$O_1K_1 = r_1$ и $O_2K_2 = r_2$ — радиусы вписанных окружностей.
$$K_2D = r_2 - r_1,$$
$\angle K_2$ — линейный угол двугранного угла при нижнем основании.

Пример 2. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды — 4 дм и 1 дм. Боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту пирамиды.

Решение. В правильных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ O и O_1 — центры, а OC и O_1C_1 — радиусы описанных окружностей, тогда

$$OC = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3};\ O_1C_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$





Проведём $C_1P \perp (ABC)$, $C_1P = OO_1$ — высота пирамиды.

$$PC = OC - O_1C_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

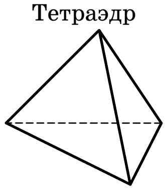
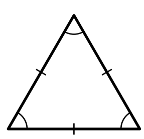
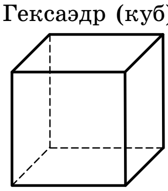
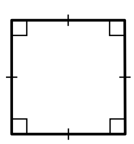
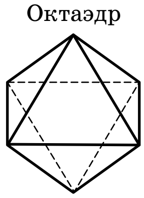
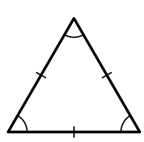
Из ΔC_1PC ($\angle C_1PC = 90°$): $C_1P^2 = C_1C^2 - PC^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$;
$C_1P = 1$.
Ответ: 1 дм.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные друг другу правильные многоугольники, к каждой вершине примыкает одинаковое количество граней и двугранные углы между смежными гранями одинаковы.

Существует ровно **пять** правильных выпуклых многогранников (их называют **телами Платона**). Это тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Правильные многогранники

Название, общий вид	Вид основания	Количество граней	Количество вершин	Количество рёбер
Тетраэдр 		4	4	6
Гексаэдр (куб) 		6	8	12
Октаэдр 		8	6	12

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Окончание таблицы

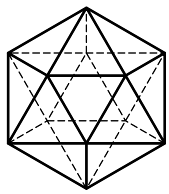
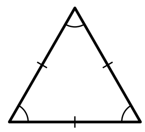
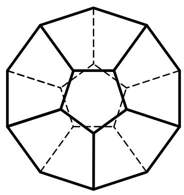
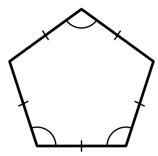
Название, общий вид	Вид основания	Количество граней	Количество вершин	Количество рёбер
Икосаэдр 		20	12	30
Додекаэдр 		12	20	30

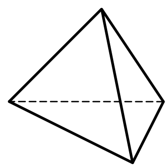
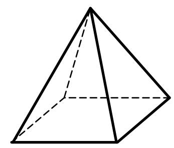
Таблица параметров правильных многогранников

Введём обозначения:
a — ребро многогранника;
φ_1 — угол, под которым ребро многогранника видно из центра описанной сферы;
φ — угол между смежными боковыми гранями;
R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного шара;
S — площадь поверхности;
V — объём.

Параметры	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$\cos\varphi_1$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\cos\varphi$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
R	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
r	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$
S	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
Сумма плоских углов при вершине	180°	270°	240°	324°	300°
V	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните таблицу:**

		
$S_{бок}$		
$S_{полн}$		
V		

Ответы на тестовые задания к неделе 28

1 — 6. **2** — 216. **3** — 12. **4** — 64. **5** — 0,95. **6** — 3,3. **7** — 1:4.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 **28** 29 30 31 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 29

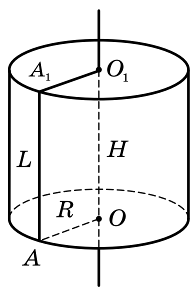
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

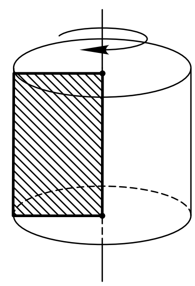
5.4. Тела и поверхности вращения
- 5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

5.5. Измерение геометрических величин
- 5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
- 5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Цилиндром (круговым цилиндром) называется тело, состоящее из двух кругов (оснований цилиндра), которые не лежат в одной плоскости и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, которые соединяют соответствующие точки этих кругов.





Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей оснований цилиндра, называют образующими цилиндра. ($AA_1 = L$ — образующая цилиндра.)

Прямым круговым цилиндром называется цилиндр, образующие которого перпендикулярны плоскости основания (далее рассматриваем только прямые круговые цилиндры, и под словом «цилиндр» рассматриваются только они).

Точки O и O_1 — центры окружностей — **оснований цилиндра**, OO_1 — **ось цилиндра.**

Высота цилиндра H — длина его образующей или расстояние между плоскостями оснований, $L = H$.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Цилиндр **является одним из тел вращения**, т. к. может быть получен вращением прямоугольника около одной из его сторон.

Сечение цилиндра плоскостью

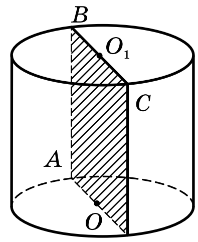
Свойства цилиндра

1. Основания цилиндра — равные круги, которые лежат в параллельных плоскостях.
2. Образующие цилиндра параллельны, равны и перпендикулярны плоскости основания.
3. Отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, равен образующей (высоте).
4. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, — прямоугольник.

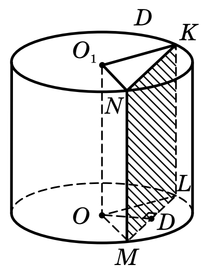
5. Сечение цилиндра, которое не пересекает основания и не параллельно основаниям, — эллипс.

Сечение цилиндра плоскостями

1. **$ABCD$ — осевое сечение цилиндра** (сечение, проходящее через ось OO_1).
$ABCD$ — прямоугольник, где $AD = d_{осн} = 2R$; $AB = H$.
Если $ABCD$ — квадрат, то цилиндр называется **равносторонним.**

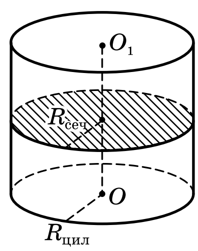


2. **Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси.**
$KLMN$ — прямоугольник;
$(KLM) \parallel OO_1$.
$KL = MN = L$ — образующие цилиндра; $OM = OL = R$ — радиус цилиндра, OD — расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.



3. **Сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям.**
Плоскость, параллельная основаниям, пересекает его боковую поверхность по окружности, которая равна окружности основания:

$$R_{сеч} = R_{цил}$$



Площадь боковой и полной поверхности цилиндра. Объём цилиндра

Для цилиндра с радиусом R и высотой H:

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{бок} = 2\pi RH.$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

3. Объём:

$$V = \pi R^2 H.$$

Развёртка цилиндра

Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть её так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежала в одной плоскости, то на этой плоскости получится фигура, которая называется **развёрткой цилиндра.**

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{3}$ см и образует с основанием цилиндра угол 60°. Найдите высоту цилиндра.

____

2. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, которая пересекает его основание по хорде, стягивающей дугу 120°. Найдите площадь сечения, если отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой хорды нижнего основания, равен 11 см и образует с плоскостью основания угол 30°.

____

3. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной 10 см. Найдите боковую поверхность цилиндра. В ответ запишите $S : \pi$.

____

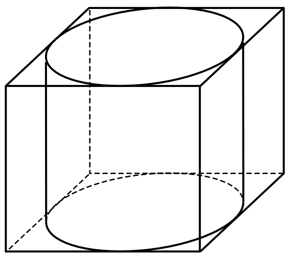
4. Во сколько раз увеличится боковая поверхность цилиндра, если радиус его основания увеличится в 2 раза, а образующая — в 3 раза?

____

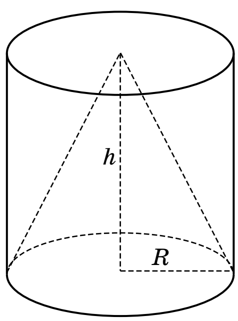
ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

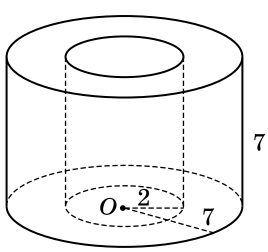
5. Цилиндр, радиус основания и высота которого равны 3,5 см, вписан в прямоугольный параллелепипед. Найдите объём параллелепипеда.



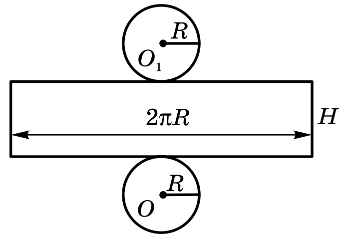
6. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту. Объём конуса равен 75. Найдите объём цилиндра.



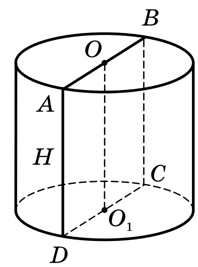
7. Найдите объём V_1 части цилиндра, изображённой на рисунке. В ответ запишите отношение V_1 и π.



Она состоит из прямоугольника и двух кругов (оснований цилиндра).



Пример. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения равна S. Найдите полную поверхность цилиндра.



Решение. Пусть $S_{\text{осн}} = Q$ и $S_{ABCD} = S$.

Обозначим $OA = R$ и $AD = H$, тогда $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R)$. Но согласно условию $2RH = S$, $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, тогда

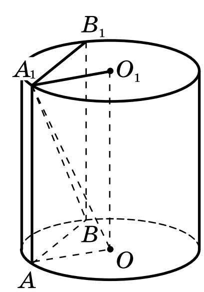
$S_{\text{бок}} = \pi S$.

Тогда $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2Q = \pi S + 2Q$.

Ответ: $\pi S + 2Q$.

Угол между прямой и плоскостью

Пример. Параллельно оси цилиндра, площадь боковой поверхности которого равна Q, проведена секущая плоскость. Диагональ образованного сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь сечения, если отрезок, который соединяет центр основания цилиндра с точкой окружности второго основания, наклонен к плоскости основания под углом α.



Решение. Пусть AA_1B_1B — данное сечение, OO_1 — ось цилиндра, тогда $S_{\text{бок}} = Q$, $\angle A_1BA = \beta$, $\angle O_1A_1O = \alpha$. Пусть R — радиус основания цилиндра. Тогда из ΔO_1A_1O:

$H = OO_1 = R \text{ tg } \alpha$.

Так как $Q = 2\pi RH = 2\pi R^2 \text{ tg } \alpha$, то

$$R^2 = \frac{Q}{2\pi \operatorname{tg}\alpha} = \frac{Q \operatorname{ctg}\alpha}{2\pi}.$$

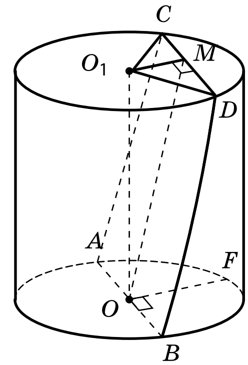
Из ΔABA_1: $AB = AA_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta = OO_1 \operatorname{ctg} \beta = R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

$$S_{ABB_1A} = AB \cdot AA_1 = R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}\beta =$$

$$= \frac{Q}{2\pi \operatorname{tg}\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}\beta = \frac{Q \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}{2\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{Q \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}{2\pi}$.

Угол между плоскостями



Пример. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает основание по хорде, равной h и стягивающей дугу β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение. Пусть плоскость проходит через O и CD, тогда она пересекает нижнее основание по диаметру AB. Пусть $OF \perp AB$, $CM = MD$, $O_1M \perp CD$, тогда $\angle MOF = \angle O_1MO = \alpha$, $CD = h$, $\angle CO_1D = \beta$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi RH$, где $R = O_1C$, $H = OO_1$. Учитывая что $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{h}{2}$, $\angle CO_1M = \frac{1}{2}\angle CO_1D = \frac{\beta}{2}$.

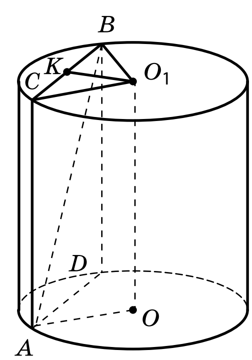
Из ΔO_1CM: $O_1C = \dfrac{CM}{\sin\angle CO_1M} = \dfrac{h}{2\sin\frac{\beta}{2}}$;

$O_1M = CM\operatorname{ctg}\angle CO_1M = \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Из ΔOO_1M: $OO_1 = O_1M\operatorname{tg}\angle O_1MO = \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Тогда $S = 2\pi\cdot\dfrac{h}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\dfrac{h}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pi h^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{\pi h^2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Угол между скрещивающимися прямыми



Пример. Концы отрезка лежат на окружностях оснований равностороннего цилиндра (осевое сечение — квадрат), угол между радиусами, проведёнными в концы отрезка, равен α. Найдите угол между этим отрезком и осью цилиндра.

Решение. Пусть OO_1 — ось цилиндра, AB — данный отрезок. Угол между радиусами OA и O_1B равен углу CO_1B, т. е. $\angle CO_1B = \alpha$. Искомый угол между отрезком AB и осью OO_1 равен углу ABD. Проведём $O_1K \perp BC$.

Из ΔCO_1K:

$$CK = CO_1\cdot\sin\angle CO_1K = CO_1\sin\left(\frac{1}{2}\angle CO_1B\right) = CO_1\sin\frac{\alpha}{2}.$$

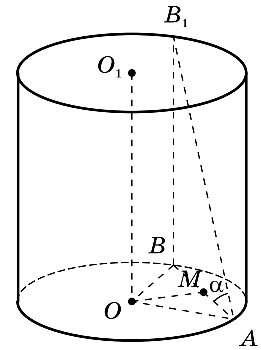
Так как $CB = 2CK = 2CO_1\sin\frac{\alpha}{2}$, то $AD = 2CO_1\sin\frac{\alpha}{2}$.

Из ΔABC, учитывая что $DB = 2CO_1$, имеем: $\operatorname{tg}\angle ABD = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2CO_1\sin\frac{\alpha}{2}}{2CO_1} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, значит,

$$\angle ABD = \operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Пример. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра — квадрат.

Решение. Пусть $AB_1 = l$, $\angle B_1AB = \alpha$.

Из ΔB_1BA имеем: $BB_1 = AB_1 \cdot \sin \angle B_1AB = l \sin \alpha$.

$AB = AB_1 \cos \angle B_1AB = l \cos \alpha$, тогда $OB = OA = \dfrac{l}{2}\sin\alpha$, $AM = \dfrac{l}{2}\cos\alpha$.

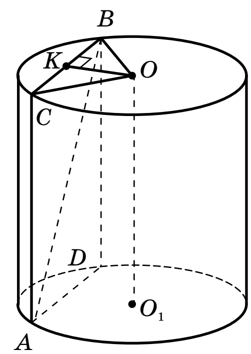
Из ΔOMA:

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4}\sin^2\alpha - \frac{l^2}{4}\cos^2\alpha} = \frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Так как $OO_1 \parallel BB_1$, то $OO_1 \parallel (ABB_1)$, и, значит, расстояние от прямой AB_1 до оси OO_1 равно расстоянию от плоскости ABB_1 до оси OO_1, а расстояние от плоскости ABB_1 до прямой OO_1 равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABB_1, т. е. $OM = \dfrac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Расстояние от точки до прямой



Пример. Высота цилиндра H, радиус основания R. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований, длина отрезка равна l. Найдите расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

Решение. Пусть $OO_1 = H$, $O_1A = R$, $AB = l$. Через отрезок AB проведём сечение цилиндра $ABCD$, которое параллельно оси цилиндра OO_1. Из ΔABC:

$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - H^2}$. Проведём $OK \perp CB$.

Тогда $CK = \dfrac{1}{2}CB = \dfrac{1}{2}\sqrt{l^2 - H^2}$. Далее из ΔKCO:

$$KO = \sqrt{CO^2 - CK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(l^2 - H^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}.$$

Учитывая что расстояние между скрещивающимися прямыми AB и OO_1 равно расстоянию между прямой OO_1 и плоскостью ABC, получаем, что искомое расстояние равно $\dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}$.

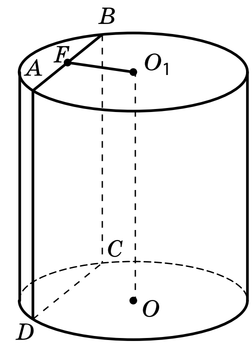
Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2 + H^2}$.

Расстояние от точки до плоскости

Пример. Радиус цилиндра равен R, высота H, площадь сечения, параллельного оси, равна S. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

Решение. Пусть $ABCD$ — сечение цилиндра. $S_{ABCD} = S$, OO_1 — ось цилиндра, $OO_1 = AD = H$, $O_1A = O_1B = R$.

Так как $S = AB \cdot AD$, то $AB = \dfrac{S}{AD} = \dfrac{S}{H}$. Расстояние между плоскостью ABC и прямой OO_1 (где $OO_1 \parallel ABC$) равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на плоскость ABC.



Проведём $O_1F \perp AB$. Учитывая, что $AF = FB = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{S}{2H}$, из ΔAFO_1 получаем:

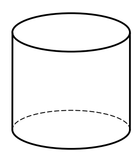
$$FO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AF^2} = \sqrt{R^2 - \frac{S^2}{4H^2}} = \frac{\sqrt{4H^2R^2 - S^2}}{2H}.$$

Это и есть искомое расстояние.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{4H^2R^2 - S^2}}{2H}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните таблицу:**

	
$S_{бок}$	
$S_{полн}$	
V	

Ответы на тестовые задания к неделе 29

1 — 9. **2** — 181,5. **3** — 100. **4** — 6. **5** — 171,5. **6** — 225. **7** — 315.

НЕДЕЛЯ 30

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

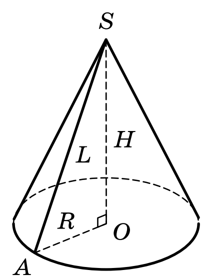
5.4. Тела и поверхности вращения
- 5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка

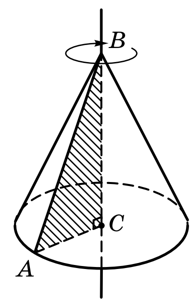
5.5. Измерение геометрических величин
- 5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
- 5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ КОНУС

Конусом (круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга (основания конуса), точки, которая не лежит в плоскости этого круга (вершины конуса), и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называют **образующими конуса**.





Прямым круговым конусом называется конус, в котором прямая, соединяющая вершину с центром основания, перпендикулярна плоскости основания (вершина проецируется в центр основания) (далее под словом «конус» понимаем прямой круговой конус).

Круг с центром O — **основание** конуса, $L = SA$ — **образующая** конуса, S — **вершина** конуса, $R = AO$ — **радиус** основания конуса.

Прямая SO — **ось** конуса, отрезок $SO = H$ — **высота** конуса.

Конус является **телом вращения**, т. к. при вращении прямоугольного треугольника около одного из катетов как оси образуется **конус**.

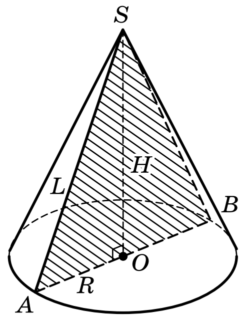
Сечение плоскостью

Свойства конуса

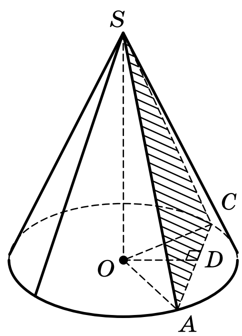
1. Основание конуса — круг.
2. Основание высоты конуса — центр основания конуса.
3. Образующие конуса равны и составляют одинаковые углы с плоскостью основания конуса и одинаковые углы с высотой.

Сечение конуса плоскостями

1. **Сечение конуса, проходящее через его ось, — осевое сечение** — равнобедренный треугольник SAB, в котором $SA = SB = L$ — образующие конуса; $AB = 2R$.



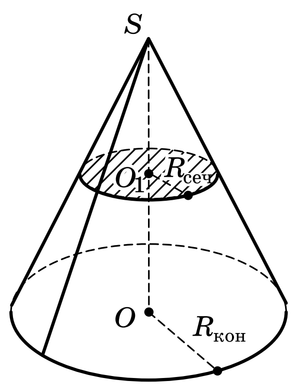
2. **Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину:** ΔASC — равнобедренный, $AS = SC = L$ — образующие; AC — хорда; $OA = OC = R$ — радиус основания; OD — расстояние от основания высоты конуса до хорды AC.



3. **Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию.**

Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса:

$$\frac{R_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}.$$



Площадь боковой и полной поверхности конуса. Объём конуса

Для конуса с радиусом основания R, высотой H и образующей L:

1. Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

2. Площадь полной поверхности конуса:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R).$$

3. Формула объёма:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус основания конуса.

2. Площадь боковой поверхности конуса равна 196π см^2, а радиус его основания — $7\sqrt{2}$ см. Найдите угол развёртки конуса.

3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно из центра основания под углом β, а из вершины — под углом α. Определите боковую поверхность конуса, если площадь сечения равна S. Вычислите при $S = \frac{12}{\pi}$ см^2, $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$.

4. Осевым сечением конуса является правильный треугольник. Образующая конуса — $4\sqrt{3}$ см. Найдите высоту конуса.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

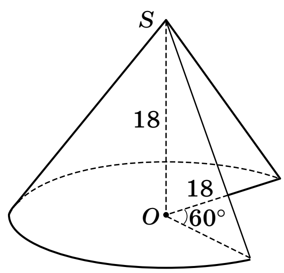
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45°, а высота конуса равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите боковую поверхность конуса. В ответ запишите $\frac{S}{\pi\sqrt{2}}$.

6. Образующая конуса равна $8\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости его основания под углом 60°. Найдите полную поверхность конуса. В ответ запишите результат $\frac{S}{\pi}$.

7. Образующая конуса равна 10 см. Найдите полную поверхность конуса, если его высота равна 6 см. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.

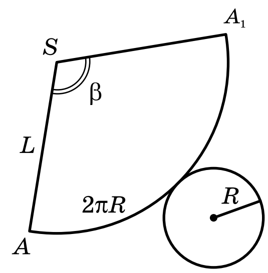
8. Найдите объём V_1 части конуса, изображённой на рисунке. В ответ запишите отношение удвоенного объёма V_1 и π.



ДЛЯ ЗАМЕТОК

Развёртка конуса

Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развёрнуть её так, чтобы боковая поверхность и основание лежали в одной плоскости, то на плоскости получится фигура, которая называется **развёрткой конуса**. Развёртка конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса, и круга основания.

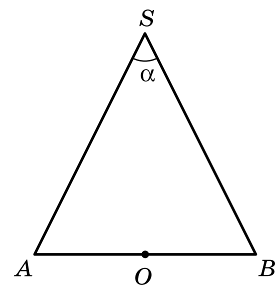


Пусть угол при вершине осевого сечения конуса ASB равен α, а $\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса.

Справедливы соотношения:

$$\beta = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2};$$

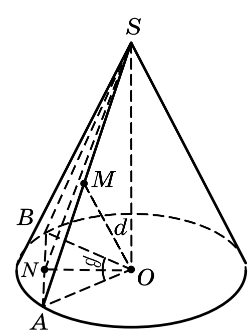
$$\alpha = 2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}.$$



Пример. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая его основание по хорде, которую видно из вершины под углом α, а из центра основания — под углом β. Найдите боковую поверхность конуса, если расстояние от центра его основания до середины образующей равно d.

Решение. ΔSAB — сечение конуса плоскостью, $SB = SA$, M — середина образующей SA, SO — высота, $\angle ASB = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

$OM = d$, боковая поверхность конуса $S_{\text{бок}} = \pi RL$, где $R = OA$, $L = SA$.



В ΔSOA ($\angle SOA = 90°$): середина M — центр описанной окружности, т. е. $MO = MA = MS$, т. е. $SA = 2d$.

Проведём $SN \perp AB$, по теореме о трёх перпендикулярах $ON \perp AB$.

$SA = SB$, тогда SN — биссектриса $\angle ASB$, а ON — биссектриса $\angle AOB$, т. к. $AO = OB$.

Из ΔSNA:

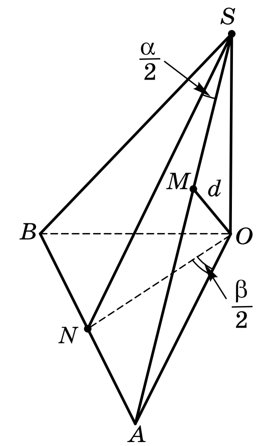
$$NA = SA\sin\frac{\alpha}{2} = 2d\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из ΔONA:

$$OA = \frac{NA}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot 2d = \frac{4\pi d^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi d^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

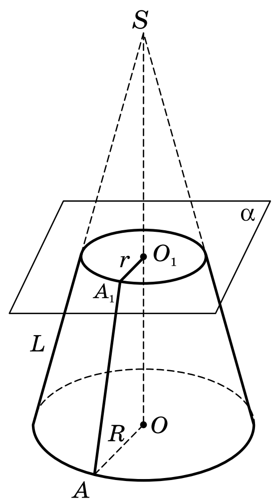


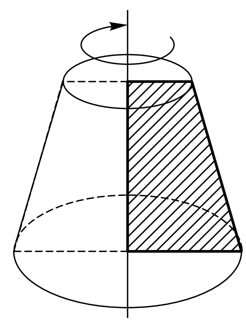
Усечённый конус

Усечённым конусом называется часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Основанием усечённого конуса называется основание полного конуса, из которого получен усечённый, и часть секущей плоскости, ограниченная конической поверхностью (круг). (Круги с центрами O и O_1 — основания; $L = AA_1$ — образующая усечённого конуса; $OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований усечённого конуса.)

Усечённый конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной её основаниям.





Свойства усечённого конуса

1. Основания — круги.
2. Отрезок, соединяющий центры оснований, перпендикулярен плоскостям оснований.
3. Образующие равны и составляют одинаковые углы с плоскостью основания.
4. Осевое сечение — равнобокая трапеция.

Основные формулы для усечённого конуса

Для усечённого конуса с радиусами оснований R и r, высотой H и образующей L:

1. Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)L.$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} = \pi(R + r)L + \pi(R^2 + r^2).$$

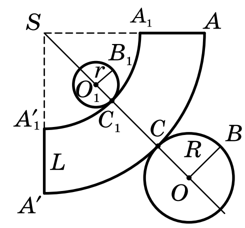
3. Объём:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2).$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

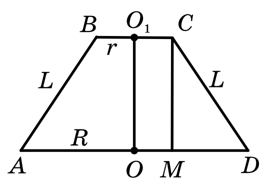
Развёртка усечённого конуса

Если поверхность усечённого конуса разрезать по образующей и окружностям и развернуть так, чтобы боковая поверхность с основаниями лежали в одной плоскости, то получим фигуру, называемую **развёрткой** усечённого конуса.

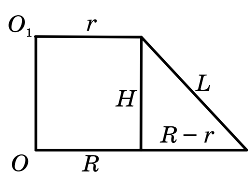


Решая задачи, в условии которых фигурирует усечённый конус, обычно рассматривают какую-либо из трёх фигур:

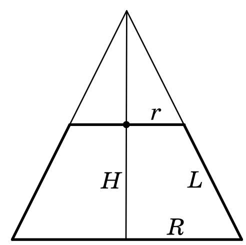
1) **осевое сечение** усечённого конуса — равнобокую трапецию $ABCD$, $AB = CD = L$, $O_1C = r$; $OD = R$; $MD = R - r$; $AM = R + r$;



2) **прямоугольную трапецию**, которая при вращении образует данный усечённый конус;

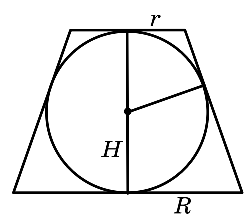


3) **осевое сечение полного конуса**, из которого получен данный усечённый конус;



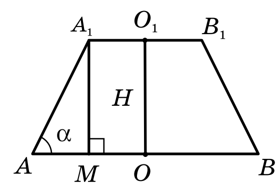
4) **полезный факт:** если в осевое сечение усечённого конуса можно вписать окружность, то его высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований.

$$H = \sqrt{D \cdot d},\ \text{где } D = 2R,\ d = 2r$$



Пример. Образующая усечённого конуса наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите объём конуса, если радиусы оснований R и r.

Решение. Рассмотрим осевое сечение усечённого конуса — равнобокую трапецию AA_1B_1B. $AA_1 = B_1B = L$ — образующие, $AO = R$, $A_1O_1 = r$. $\angle A_1AO = \alpha$.



Проведём $A_1M \perp AB$, $A_1M = OO_1 = H$ — высота усечённого конуса.

Из ΔA_1MA ($\angle A_1MA = 90°$): $A_1M = AM\,\mathrm{tg}\,\alpha = (R - r)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),\ \text{где } H = A_1M.$$

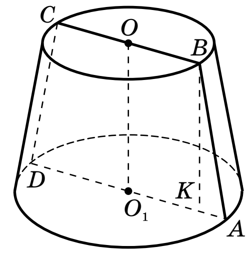
Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi(R - r)\,\mathrm{tg}\,\alpha(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Угол между прямой и плоскостью

Пример. Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 см и 6 см, а образующая — 5 см. Найдите высоту усечённого конуса, площадь осевого сечения, угол наклона образующей к плоскости основания.



Решение. Пусть $ABCD$ — осевое сечение усечённого конуса, $AO_1 = 6$ см, $BO = 3$ см, $AB = 5$ см. $ABCD$ — равнобокая трапеция. Проведём $BK \perp AD$, тогда $BK = OO_1$. Из ΔABK:

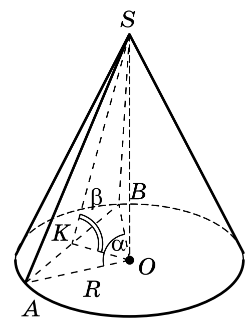
$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - (AO_1 - BO)^2} =$$
$$= \sqrt{5^2 - (6-3)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}.$$
$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{2(AO_1 + BO)}{2} \cdot BK = (AO_1 + BO) \cdot BK =$$
$$= (3 + 6) \cdot 4 = 36 \text{ (см}^2\text{)},$$ где S — площадь осевого сечения.

Из ΔABK: $\operatorname{tg} \angle BAK = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{4}{3}$, тогда $\angle BAK = \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$.

Ответ: 4 см; 36 см^2; $\operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$.

Угол между плоскостями

Пример. Высота конуса равна h. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу, угловая величина которой α, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол β.



Решение. Пусть SAB — данное сечение, SO — высота, $SO = h$, $\angle AOB = \alpha$. Проведём $OK \perp AB$, тогда $SK \perp AB$ согласно теореме о трёх перпендикулярах, и значит, $\angle SKO = \beta$. Из ΔSKO:

$$SK = \frac{SO}{\sin \angle SKO} = \frac{h}{\sin \beta}; \quad KO = SO \cdot \operatorname{ctg} \angle SKO = h \operatorname{ctg} \beta.$$

Из ΔAOK: $AK = OK \cdot \operatorname{tg} \angle AOK = h \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.

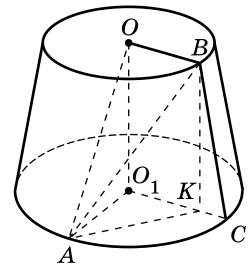
Площадь сечения S находим по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AK \cdot SK = AK \cdot SK = h \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{h}{\sin \beta} = h^2 \cdot \frac{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \beta}.$$

Ответ: $h^2 \cdot \dfrac{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \beta}$.

Угол между скрещивающимися прямыми

Пример. Из центров O и O_1 усечённого конуса проведены радиусы OB и O_1A. Найдите угол между этими радиусами, если $OB = 3$ см, $O_1A = 4$ см, $OO_1 = 12$ см, $AB = 13$ см.



Решение. Проведём $O_1C \parallel OB$, тогда угол между радиусами OB и O_1A равен углу AO_1C. Проведём $BK \parallel OO_1$, тогда $BK = 12$ см, $O_1K = OB = 3$ см.

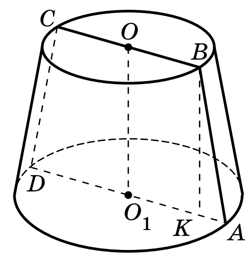
Из прямоугольного треугольника ABK имеем:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Поскольку в треугольнике O_1AK имеем: $AK^2 = AO_1^2 + O_1K^2$ $(5^2 = 3^2 + 4^2)$, то $\angle AO_1K = 90°$. Следовательно, угол между данными радиусами равен 90°.

Ответ: 90°.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



Пример. Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 см и 6 см, а образующая — 5 см. Найдите расстояние между любыми двумя диаметрами оснований.

Решение. Общим перпендикуляром двух диаметров оснований является отрезок OO_1, где O и O_1 — центры оснований.

Пусть $ABCD$ — осевое сечение усечённого конуса.

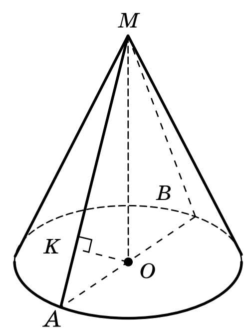
$AO_1 = 6$ см, $BO = 3$ см, $AB = 5$ см.

$ABCD$ — равнобокая трапеция. Проведём $BK \perp AD$, тогда $BK = OO_1$. Из прямоугольного треугольника ABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - (AO_1 - BO)^2} = \sqrt{5^2 - (6-3)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (см)}.$$

Ответ: 4 см.

Расстояние от точки до прямой



Задача. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α, а расстояние от центра основания к образующей конуса — a. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение. MAB — осевое сечение конуса. $\angle AMB = \alpha$; $OK \perp AM$; $OK = a$. Из ΔAOK $(\angle K = 90°)$: $OA = \dfrac{OK}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Из ΔMOA $(\angle O = 90°)$: $AM = \dfrac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Площадь боковой поверхности конуса $S = \pi \cdot OA \cdot MA = \dfrac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

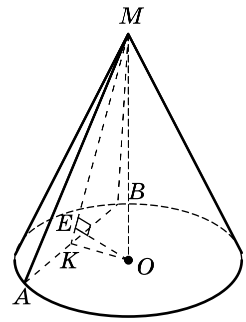
Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Расстояние от точки до плоскости

Пример. В основании конуса проведена хорда AB на расстоянии 3 см от центра O основания. MO — высота конуса, $MO = 6\sqrt{2}$ (см). Найдите расстояние от точки O до плоскости AMB.

Решение. Точка K — середина хорды AB. Тогда $OK \perp AB$, $OK = 3$ см. OK — проекция MK на плоскость AOB, $OK \perp AB$. Тогда $MK \perp AB$. Следовательно, $AB \perp (MOK)$ и $(AMB) \perp (MOK)$. В плоскости MOK опустим перпендикуляр OE на линию MK пересечения плоскостей MOK и AMB. Так как плоскости MOK и AMB перпендикулярны, то $OE \perp (AMB)$, то есть OE — искомое расстояние.

Из ΔMOK ($\angle O = 90°$):



$MK = \sqrt{OK^2 + MO^2} = \sqrt{9+72} = 9$ (см). Так как $S_{\Delta MOK} = \dfrac{1}{2}\, MO \cdot OK$

и $S_{\Delta MOK} = \dfrac{1}{2}\, OE \cdot MK$, то $OE \cdot MK = MO \cdot OK$.

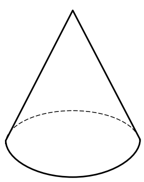
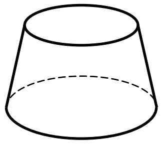
Так как $OE \cdot MK = MO \cdot OK$, то

$$OE = \frac{MO \cdot OK}{MK} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните таблицу:**

		
$S_{бок}$		
$S_{полн}$		
V		

Ответы на тестовые задания к неделе 30

1 — 18. **2** — 180. **3** — 16. **4** — 6. **5** — 72. **6** — 144. **7** — 144. **8** — 3240.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

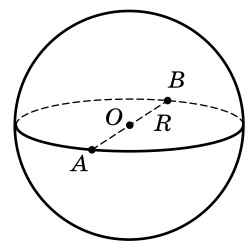
НЕДЕЛЯ 31

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.4. Тела и поверхности вращения
 5.4.3. Шар и сфера, их сечения
5.5. Измерение геометрических величин
 5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
 5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

ШАР И СФЕРА

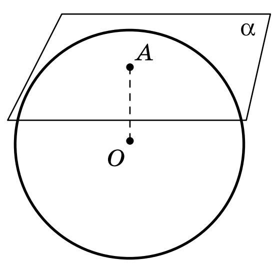
Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, расположенных на расстоянии, не большем данного (это расстояние называется радиусом шара), от данной точки (центра шара). ($OA = OB = R$ — радиус шара; $AB = 2R$ — диаметр шара.)



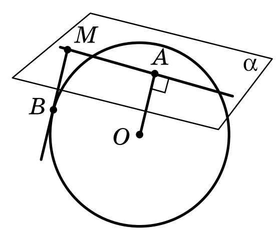
Поверхность шара называется **шаровой поверхностью,** или **сферой.**

Шар (сфера) может быть получен вращением полукруга (полуокружности) около диаметра.

Свойства шара



$OA \perp \alpha$



$OA \perp \alpha$

$MB = MA$

1. Любое сечение шара плоскостью — круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
2. **Диаметральная плоскость** проходит через центр шара.
3. Сечения шара, одинаково удалённые от его центра, имеют одинаковые радиусы.
4. Из двух сечений шара больший радиус имеет то, плоскость которого ближе к центру.
5. Любая диаметральная плоскость шара — **плоскость его симметрии**, центр шара — **центр его симметрии.**

Касательной плоскостью к шару называется плоскость, которая проходит через точку сферы (точку касания) и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку.

Касательная плоскость имеет с шаром **только одну** общую точку.

Касательной к шару называется прямая, которая лежит в секущей плоскости и проходит через точку касания сферы и плоскости.

Все отрезки касательных, проведённых из данной точки к шару, равны.

Площадь поверхности. Объём шара

Для шара (сферы) радиуса R:

1. Объём шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

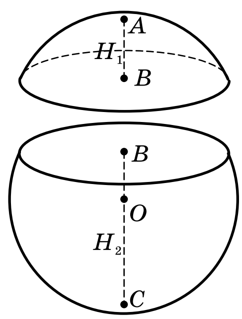
2. Площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2.$$

Части шара

Шаровой сегмент

Шаровой сегмент — часть шара, которую отсекает от него секущая плоскость.



Плоскость сечения делит шар на два сегмента.

Длины отрезков диаметра, перпендикулярные плоскости сечения, называются **высотами сегментов**. ($AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента.)

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = \pi H(4R - H).$$

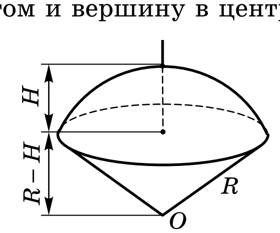
3. Объём:

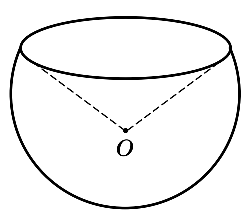
$$V_{\text{A}} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, H — высота сегмента.

Шаровой сектор

Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.





ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Шар, диаметр которого 30 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения. В ответ запишите результат, поделённый на π.

____

2. Сфера касается всех сторон ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если радиус сферы равен 10 см. Ответ округлить до сотых.

____

3. Будем считать радиус земного шара равным 6400 км. Найдите длину параллели, если её широта 60° $(\pi \approx 3{,}14)$.

____

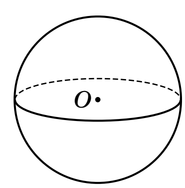
4. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 45° к нему. Найдите площадь сечения, если радиус шара равен $25\sqrt{2}$ м, в ответ запишите $S_{\text{сеч}} : \pi$.

____

5. На сфере даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними равны 12 см, 16 см, 20 см. Радиус сферы — $\sqrt{125}$ см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки.

____

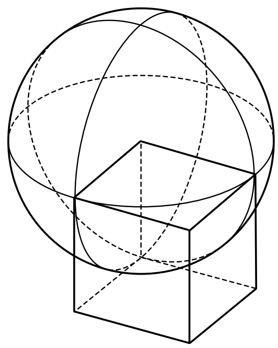
6. Площадь большого круга шара равна 5. Найдите площадь поверхности шара.



____

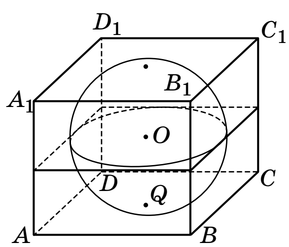
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

7. Центром шара является вершина куба с ребром 1,8. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответ запишите отношения S к π.



8. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшить в 3 раза?

9. Прямоугольный параллелепипед описан около шара, радиус которого равен 4,5. Найдите его объём.



ДЛЯ ЗАМЕТОК

Замечание. Если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют.

1. Площадь полной поверхности:

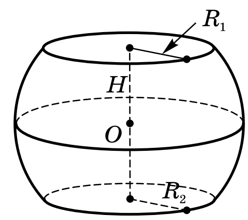
$$S_{\text{полн}} = \pi R(2H + \sqrt{H(2R - H)}).$$

2. Объём:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

3. Шаровой слой

Шаровой слой — часть шара, размещённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



Расстояние между этими плоскостями называется высотой шарового слоя H, а сами сечения, которые ограничивают пояс, — основаниями с радиусами R_1 и R_2.

1. Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус шара.

2. Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2).$$

3. Объём:

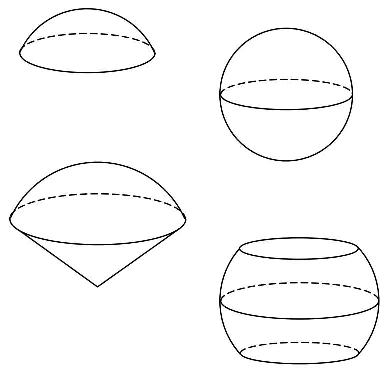
$$V = \frac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2).$$

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

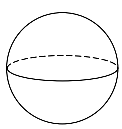
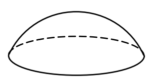
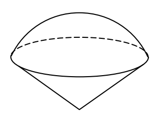
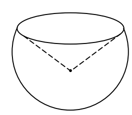
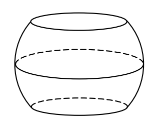
♦ **Соедините рисунок части шара с его названием:**

шар — шаровой сектор

шаровой сегмент — шаровой слой



♦ **Заполните таблицу:**

					
$S_{бок}$					
$S_{полн}$					
V					

Ответы на тестовые задания к неделе 31

1 — 144. **2** — 8,77. **3** — 20096. **4** — 625. **5** — 5. **6** — 20. **7** — 1,62. **8** — 9. **9** — 729.

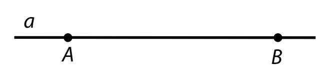
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 **31** 32 33 34 35 36

НЕДЕЛЯ 32

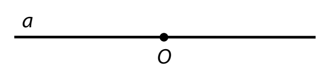
Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.5. Измерение геометрических величин
- 5.5.1. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности
- 5.5.2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
- 5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
- 5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями

ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК, ЛУЧ. СРАВНЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ



Часть прямой a, ограниченная двумя точками, называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**.



Проведём прямую a и отметим на ней точку O. Точка O разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом, исходящим из точки** O. Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают строчной латинской буквой.

Две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением. Чтобы выяснить, равны два отрезка или нет, накладывают один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого. Если при этом два других конца также совместятся, то такие отрезки равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого.

Серединой отрезка называется точка этого отрезка, делящая его пополам (то есть на два равных отрезка).

Нахождение длины отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (этот отрезок нередко называют **масштабным отрезком**). Выбрав единицу измерения, можно найти длину любого отрезка. На практике для измерения длин отрезков и нахождения расстояний чаще всего используют **миллиметры, сантиметры, дециметры, метры, километры**. Эти единицы измерения длин связаны между собой, в частности, следующим образом:

1 километр = 1000 метров, 1 метр = 100 сантиметров,

1 дециметр = 10 сантиметров, 1 сантиметр = 10 миллиметров.

Углы. Сравнение и измерение углов

Углом называется фигура, которая состоит из точки, называемой **вершиной угла**, и двух лучей, называемых **сторонами угла**, исходящих из этой точки. Угол обозначают знаком ∠. На рис. 2 изображён угол с вершиной O и сторонами OA и OB. Этот угол обозначают так: $\angle AOB$ (буква, обозначающая вершину, всегда ставится посередине) или $\angle O$ (O — буква, поставленная у вершины угла). Нередко угол обозначают цифрой, поставленной внутри угла: $\angle 1$.

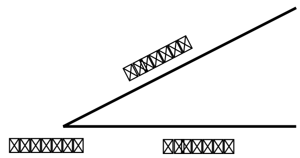


Рис. 1

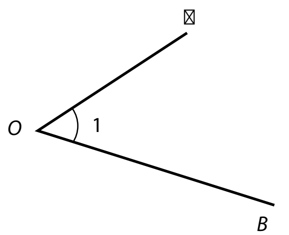
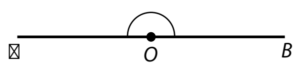


Рис. 2

Угол называется **развёрнутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой, т. е. каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны.



Два угла называются **равными**, если их можно совместить наложением. Чтобы установить, равны два неразвёрнутых угла или нет, необходимо совместить сторону одного угла со стороной другого так, чтобы две другие стороны оказались по одну сторону от совместившихся сторон. Если две другие стороны также совместятся, то углы равны (рис. 3, *а*). Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого (рис. 3, *б*). На рис. 3, *а* и *б* $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 < \angle 4$.

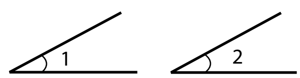


Рис. 3, *а*

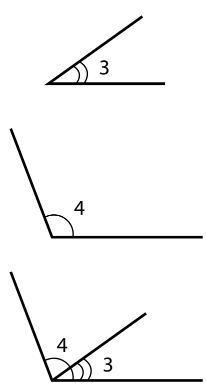


Рис. 3, *б*

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. Луч OB — биссектриса угла AOC (равные углы на рисунках обозначают одинаковыми дужками).

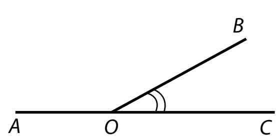


Рис. 4

За единицу измерения углов принимают **градус** (обозначается 1°) — угол, равный части развёрнутого угла. Более мелкими единицами измерения углов являются

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите длину дуги окружности, радиус которой равен 4 см, отвечающей центральному углу 270° ($\pi \approx 3{,}14$).

____

2. Концы хорды делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 7. Найдите вписанные углы, опирающиеся на эту хорду.

____

3. Точки K, M, N делят окружность на три дуги, так что $\smile KM : \smile MN : \smile KN = 4 : 5 : 9$. Найдите углы треугольника KMN.

____

4. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 2 м, 3 м, 4 м, 5 м, 15 м? Объясните ответ.

____

5. Основания равнобокой трапеции равны 11 см и 15 см, а диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите периметр трапеции.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых равны 15 см и 20 см, а длины их проекций на плоскость относятся как 9 : 16. Найдите расстояние от точки до плоскости.

____

7. Плоскости α и β параллельны. Длина отрезка A_1B_1 равна 12 см. A_1B_1 лежит в плоскости α. Расстояние от точки A_2, лежащей в плоскости β, до точки B_1 равно 15 см. Найдите расстояние между плоскостями α и β, если $A_1A_2 \perp \alpha$.

____

8. Из точки к плоскости проведены две наклонные, проекции которых на эту плоскость равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от точки до плоскости, если сумма длин наклонных равна 28 см.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

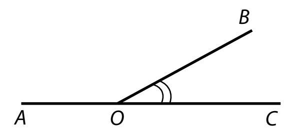
минута (обозначают знаком «$'$») и **секунда** (обозначают знаком «$''$»):

$$1^\circ = 60',\ 1' = 60''.$$

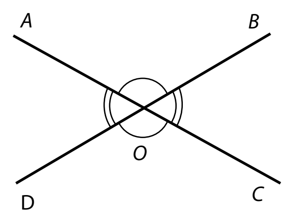
Положительное число, показывающее, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Равные углы имеют равные градусные меры. Меньший угол имеет меньшую градусную меру. Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

Развёрнутый угол равен 180°. Если стороны угла совпадают, то величину такого угла полагают равной 0°.

Смежные и вертикальные углы. Углы при пересечении двух прямых третьей прямой

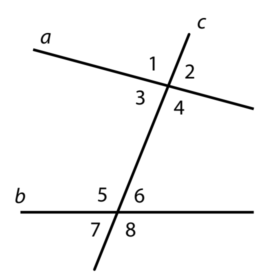


Смежными углами называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой. (Углы AOB и BOC — смежные. Сумма смежных углов равна 180°.)



Вертикальными углами называются два угла, у которых стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. (Вертикальные углы: $\angle AOB$ и $\angle DOC$, $\angle AOD$ и $\angle BOC$.)

Вертикальные углы равны.

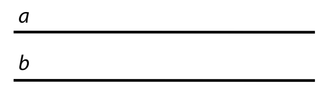


Пусть прямые a и b пересечены третьей прямой c, называемой **секущей**. Тогда образуется восемь углов, которые имеют специальные названия. Четыре угла, расположенные между прямыми a и b, т. е. углы 3, 4, 5, 6, называются **внутренними углами**, а углы 1, 2, 7, 8 — **внешними углами**. Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**. Углы 3 и 6, 4 и 5 называются **внутренними накрест лежащими**. Углы 1 и 8, 2 и 7 называются **внешними накрест лежащими**. Углы 3 и 5, 4 и 6 называются **внутренними односторонними**. Углы 1 и 7, 2 и 8 называются **внешними односторонними**.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Параллельные прямые. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами

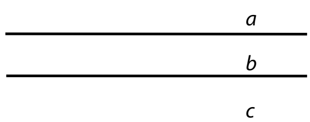
Параллельными прямыми называются две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Параллельность прямых обозначается знаком ‖. Параллельность прямых a и b записывается так: $a \parallel b$.



Аксиома параллельных: Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной.

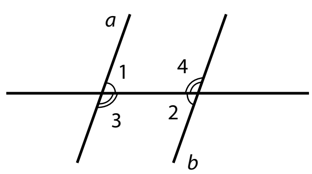
Признаки параллельности прямых

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. Если $a \parallel b$, $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

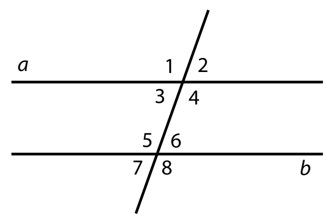


2. Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Если $\angle 1 = \angle 2$ или $\angle 3 = \angle 4$, то $a \parallel b$.

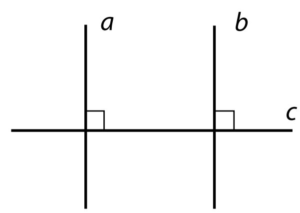
3. Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны. Если $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ или $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, то $a \parallel b$.



4. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны. Если $\angle 1 = \angle 5$, или $\angle 2 = \angle 6$, или $\angle 3 = \angle 7$, или $\angle 4 = \angle 8$, то $a \parallel b$.



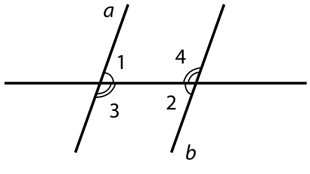
5. Если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны. Если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$.



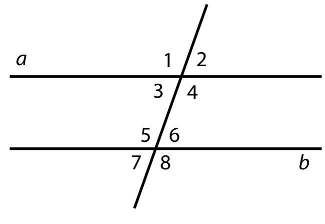
Свойства параллельных прямых

1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.
Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 4 = 180°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.



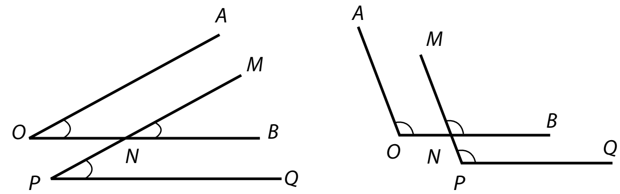
3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.
Если $a \parallel b$, то $\angle 1 = 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 **32** 33 34 35 36

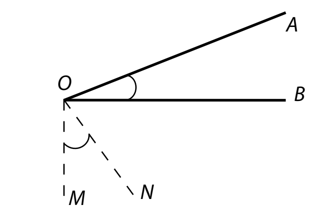
Углы с соответственно параллельными сторонами

Возьмем на плоскости две точки O и P и из этих точек проведём две пары лучей $OA \parallel PM$ и $OB \parallel PQ$ так, чтобы углы AOB и MPQ были оба острые или оба тупые. (Углы AOB и MPQ — углы с соответственно параллельными сторонами.)



Углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые. Углы с соответственно параллельными сторонами в сумме составляют 180°, если один из них острый, а другой тупой.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

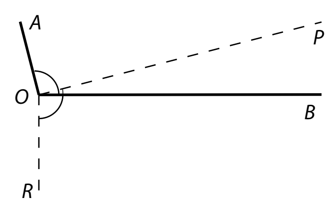


Построим произвольный острый угол AOB. Проведём через вершину угла лучи, перпендикулярные к его сторонам, так, чтобы они образовали острый угол.

$OM \perp OB$ и $ON \perp OA$. Мы получили новый угол MON. Стороны углов AOB и MON взаимно перпендикулярны.

$\angle AOB = 90° - \angle BON$; $\angle MON = 90° - \angle BON$.

Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle MON$.



Построим произвольный тупой угол AOB и через его вершину проведём лучи, перпендикулярные к его сторонам, так, чтобы они образовали тупой угол $OP \perp OA$ и $OR \perp OB$, угол POR — тупой. Стороны углов AOB и POR взаимно перпендикулярны, поэтому

$\angle AOB = 90° + \angle POB$; $\angle POR = 90° + \angle POB$.

Отсюда $\angle AOB = \angle POR$.

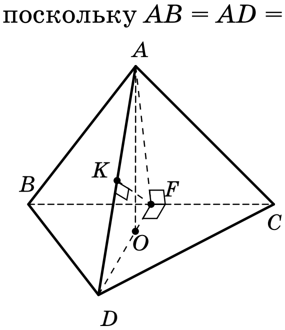
Следовательно, углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой, если оба острые или оба тупые.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами в сумме составляют 180°, если один из них острый, а другой тупой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пример. Дан тетраэдр $ABCD$, длина каждого ребра которого равна a. Найдите расстояние между прямыми AD и BC.

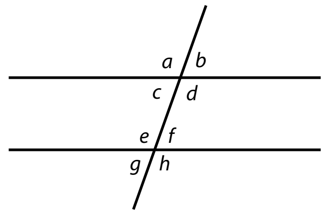
Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Проведём $AO \perp (BCD)$, поскольку $AB = AD = AC$, то O — центр ΔBCD. Проведём $DF \perp BC$, тогда $AF \perp BC$ (по теореме о трёх перпендикулярах), и значит, $(AFD) \perp BC$. Следовательно, расстояние между прямыми BC и AD равно расстоянию FK, где $FK \perp AD$. Учтём, что $AF = FD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK = KD = \dfrac{a}{2}$.



Из ΔFKD: $FK = \sqrt{FD^2 - DK^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ



♦ **Запишите равные углы:**

♦ **Запишите соответствующие углы:**

внутренние: ____________

внешние: ____________

соответственные: ____________

внутренние накрест лежащие: ____________

внешние односторонние: ____________

Ответы на тестовые задания к неделе 32

1 — 18,84. **2** — 40; 140. **3** — 40, 50, 90. **4** — нет. **5** — 56. **6** — 12. **7** — 9. **8** — 12.

НЕДЕЛЯ 33

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

5.6. Координаты и векторы
- 5.6.1. Координаты на прямой; декартовы координаты на плоскости и в пространстве
- 5.6.2. Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы
- 5.6.3. Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число
- 5.6.4. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
- 5.6.5. Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам
- 5.6.6. Координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами

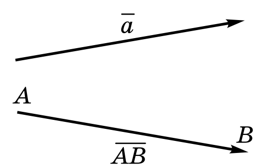
СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Величины бывают двух видов. Величины, которые характеризуются своими числовыми значениями (длина, площадь, температура, масса), называют **скалярными величинами,** или **скалярами.**

Однако множество физических величин характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлением (сила, скорость, давление).

Величины, которые характеризуются не только числовыми значениями, но и направлением, называют **векторными величинами,** или **векторами.**

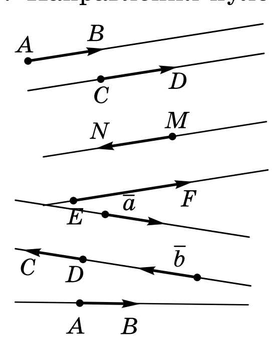
Вектором называется направленный отрезок.



Для обозначения векторов используют маленькие латинские буквы: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,… или две большие: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Первая буква при такой записи означает начало вектора, а вторая — конец. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением ставят черту: $\overline{CD}$, $\overline{m}$, $\overline{b}$ и т. д.

Абсолютной величиной, или **модулем,** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, который изображает вектор. Длина вектора $\overline{AB}$ (или $\overline{a}$) обозначается: $\left|\overline{AB}\right|$ (или $\left|\overline{a}\right|$).

Нулевым вектором называется вектор $\overline{AA}$, начало и конец которого совпадают. Поэтому любую точку можно считать вектором. Нулевой вектор обозначается $\overline{0}$. Направления нулевой вектор не имеет, его длина равна нулю, т. е. $\left|\overline{0}\right| = 0$.



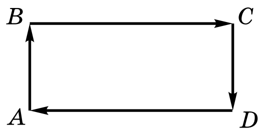
Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **одинаково направленными**, если лучи AB и CD одинаково направлены.

Векторы $\overline{MN}$ и $\overline{EF}$ называются **противоположно направленными**, если лучи MN и EF противоположно направлены.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Например, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{DC}$ коллинеарны, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ неколлинеарны.

Векторы в прямоугольнике $ABCD$: $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — коллинеарны, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ — неколлинеарны.



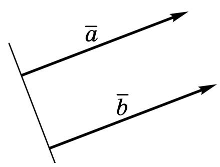
Равенство векторов

Два вектора называются **равными**, если они совмещаются параллельным переносом.

Это означает, что существует **параллельный перенос**, который переводит начало и конец одного вектора в начало и конец другого вектора.

Из данного определения следует:

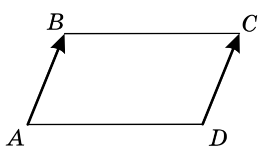
Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине: $|\overline{a}|=|\overline{b}|$.



Если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

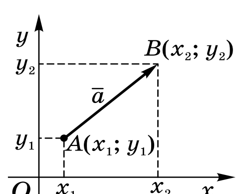
Для решения задач бывает полезна теорема — **признак равенства векторов:**

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ не лежат на одной прямой, то для равенства векторов необходимо и достаточно, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом.



Координаты вектора

Пусть вектор $\overline{a}$ имеет началом точку $A(x_1;\ y_1)$, а концом точку $B(x_2;\ y_2)$. Координатами вектора $\overline{a}$ называются числа $a_1=x_2-x_1$; $a_2=y_2-y_1$.



Чтобы найти координаты вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, надо от координат конца вектора отнять соответствующие координаты начала. Координаты **нулевого вектора** равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ равна: $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Концы отрезка $A(5;-2;-4)$ и $B(5;3;6)$. Найдите точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xz. В ответ запишите ординату этой точки.

______

2. В ABC $A(2;1;3)$; $B(2;1;5)$; $C(0;1;1)$. Найдите длину медианы AM.

______

3. Найдите острый угол, который образует с осью Ox прямая

$$x+y\sqrt{3}+1=0.$$

______

4. Найдите длину вектора $\overline{a}=-3\overline{AB}$, если $A(3;-2;0)$ и $B(5;0;-1)$.

______

5. Известно, что $|\overline{a}|=11$, $|\overline{b}|=23$, $|\overline{a}-\overline{b}|=30$. Найдите $|\overline{a}+\overline{b}|$.

______

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Даны точки: $A(8;\ -2;\ 5)$, $B(2;\ 3;\ 7)$, $C(-3;\ 9;\ 4)$ и $D(3;\ 4;\ m)$. При каком значении m равны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$?

____

7. Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ коллинеарны. Найдите λ ($\lambda > 0$), если $|\lambda\overline{a}| = 5$, а координаты вектора $\overline{a} = \overline{(6;\ -8)}$.

____

8. Даны векторы $\overline{a}(-1;1)$; $\overline{b}(1;1)$ и $\overline{c}(1;-2)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы выполнялось равенство $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$. В ответ запишите $\lambda\ + \mu$.

____

9. Даны три некомпланарных вектора $\overline{a}(3;-2;1)$; $\overline{b}(-1;1;-2)$ и $\overline{c}(2;1;-3)$. Найдите разложение вектора $\overline{d}(11;-6;5)$ по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$. В ответ запишите $\lambda + \mu + \nu$.

____

10. Даны точки $A(0;1;1)$, $B(1;1;2)$, $C(2;-2;2)$ и $D(2;-3;1)$. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.

Если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Пример. Найдите координаты и абсолютную величину вектора $\overline{AB}$, если $A(3;\ 5)$ и $B(7;\ 5)$.

Решение. $\overline{AB}\,(7-3;\ 5-5)$; $\overline{AB}\,(4;\ 0)$.

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{16} = 4.$

Ответ: (4; 0); 4.

Сложение векторов

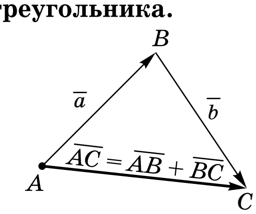
Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами (a_1, a_2) и (b_1, b_2) называется вектор $\overline{c}$ с координатами $(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$, т. е. $\overline{a}(a_1;\ a_2)+\overline{b}(b_1;\ b_2)=\overline{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Например, $\overline{a}\,(-2;\ 5)$ и $\overline{b}\,(7;\ -10)$; $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, тогда

$$\overline{c}=\overline{(-2+7;5-10)};\quad \overline{c}\overline{(5;-5)}.$$

Правила сложения векторов

1. Правило треугольника.



Какими бы ни были точки A, B и C, имеет место векторное равенство:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Это правило даёт следующий способ сложения векторов:

1) от произвольной точки построим вектор $\overline{a}$;
2) от конца вектора $\overline{a}$ отложим вектор $\overline{b}$;
3) тогда вектор $\overline{c}$ — вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец — с концом вектора $\overline{b}$, является суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

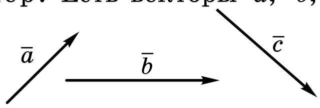
Этим способом можно складывать любое количество векторов.

2. Правило параллелограмма.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить так, чтобы они выходили из одной точки, то их **сумма** — диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Вектор-сумма $\bar{c}$ выходит из той же точки, что и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

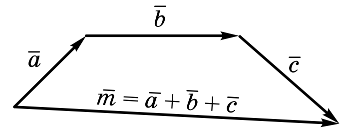
Пример. Есть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Дано:



Найдите: вектор $\overline{m}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

Построение:



1) отложим вектор $\bar{a}$ от произвольной точки;
2) от конца вектора $\bar{a}$ отложим вектор $\bar{b}$, от конца вектора $\bar{b}$ отложим вектор $\bar{c}$;
3) сумма векторов $\overline{m}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, начало его совпадает с началом вектора $\bar{a}$, конец — с концом вектора $\bar{c}$.

Законы сложения векторов

$$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$$

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$$

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$$

Умножение вектора на число

Произведением вектора $(\overline{a_1;\,a_2})$ на число λ называется вектор $(\overline{\lambda a_1;\,\lambda a_2})$, т. е. $(\overline{a_1;\,a_2})\lambda=(\overline{\lambda a_1;\,\lambda a_2})$.

По определению $(\overline{a_1;\,a_2})\lambda=\lambda(\overline{a_1;\,a_2})$.

Законы умножения вектора на число

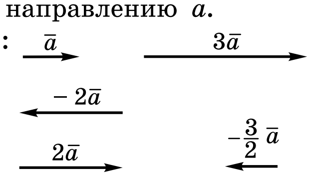
Для любого вектора $\bar{a}$ и чисел λ и μ: $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$.

Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа λ: $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ **равна** $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$.

Направление вектора $\lambda\bar{a}$: если $\lambda>0$ — совпадает с направлением $\bar{a}$; если $\lambda<0$ — противоположно направлению $\bar{a}$.

Например:



Пример. *Даны* векторы $\bar{a}(3;2)$ и $\bar{b}(0;-1)$.

Найти: абсолютную величину вектора $\bar{c}=-2\bar{a}+4\bar{b}$.

Решение.

$$\bar{c}=-2\bar{a}+4\bar{b}=-2(\overline{3;2})+4(\overline{0;-1})=(\overline{-6;-4})+(\overline{0;-4})=(\overline{-6;-8});\quad |\bar{c}|=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10.$$

Ответ: 10.

Скалярное произведение векторов. Угол между векторами

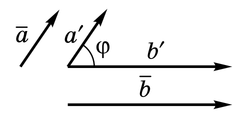
Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1;\, a_2)$ и $\bar{b}(b_1;\, b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$ и называется **скалярным квадратом** $\bar{a}^2$; очевидно, $\bar{a}^2 = \left|\bar{a}\right|^2$.

Из определения скалярного произведения следует: для любых векторов $\bar{a}(a_1;\, a_2)$, $\bar{b}(b_1;\, b_2)$ и $\bar{c}(c_1;\, c_2)$

$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c}.$$



Углом между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\varphi.$$

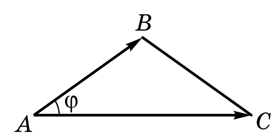
Следствия

1. Косинус угла между векторами можно найти по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$.

2. Если векторы **перпендикулярны**, то их **скалярное произведение равно нулю.** Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$.

Пример. Дан треугольник с вершинами $A(0;\sqrt{3})$; $B(2;\sqrt{3})$; $C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найти: угол A.



Решение. Найдём угол между векторами, выходящими из точки A, т. е. $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$.

1. Найдём координаты векторов: $\overline{AB} = \left(\overline{2-0;\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right)$; $\overline{AB}(2;0)$;

$\overline{AC} = \left(\dfrac{3}{2}-0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)$; $\overline{AC}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Найдём модули векторов: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$; $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

3. Найдём скалярное произведение векторов:

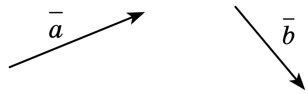
$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 2\cdot\dfrac{3}{2} + 0\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3$.

4. Итак: $\cos\varphi = \dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi = 30°$.

Ответ: 30°.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Сложите векторы двумя способами:**



1) 2)

♦ **Запишите теорему о скалярном произведении:**

Ответы на тестовые задания к неделе 33

1 — –0,5. **2** — 1. **3** — 30. **4** — 9. **5** — 20. **6** — 2. **7** — 0,5. **8** — –2. **9** — 0. **10** — 120.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ГЕОМЕТРИЯ»

1. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани — 2,5 см. Найдите объём (в см^3) призмы.

2. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удалённой от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Найдите длину секущей (в см).

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения этого куба, которое проходит через вершину A и середины рёбер B_1C_1 и C_1D_1, если ребро куба равно a.

4. Через середину высоты правильной треугольной пирамиды параллельно её боковой грани проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна S.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде проведено сечение плоскостью, которая проходит через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Найдите площадь сечения.

6. Сфера касается всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной 2. Найдите длину бокового ребра пирамиды, если радиус сферы равен 3.

НЕДЕЛЯ 34

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

6.1. Элементы комбинаторики
- 6.1.1. Поочередный и одновременный выбор
- 6.1.2. Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Множество и подмножество

Под множеством в математике понимают собрание, совокупность любых предметов, объектов, объединённых между собой некоторым общим для них всех признаком. Множество как математическое понятие не имеет определения. Это первичное понятие. Смысл его можно объяснить на разных примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся вашего класса, о множестве книг в библиотеке, о множестве всех людей на Земле и др.

Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое — множество, состоящее из этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845–1918) определил это такими словами: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Предметы (объекты), из которых состоит множество, называют его элементами. Для обозначения множеств используют прописные буквы A, B, C, ..., для обозначения элементов — малые a, b, c, ...

Тот факт, что элемент a является элементом множества A, записывают так: $a \in A$ (читается: «a является элементом множества A, или a принадлежит A, или a содержится в A, или A содержит a»). Если элемент x не является элементом множества A, то это записывается так: $x \notin A$ (читается: «x не является элементом множества A, или x не принадлежит A, или x не содержится в A, или A не содержит x»).

Например, если A — множество делителей числа 30, то $5 \in A$, $10 \in A$, $7 \notin A$, $12 \notin A$ и т. д.

Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Например, множество стран на земном шаре задаётся их списком в географическом атласе, множество учащихся вашего класса — их списком в классном журнале. Если множество задано списком, то используют фигурные скобки, в которые помещают названия всех элементов множества, разделённые запятыми. Например, если A — множество делителей числа 30, то $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Если B — множество букв слова «класс», то $B = \{$к, л, а, с$\}$.

Не все множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такое множество нельзя задать перечислением его элементов. Множество считается заданным, если указано свойство, которое имеют все его элементы и которого не имеют другие объекты. Такое свойство называется **характеристическим свойством** множества.

Множество элементов, имеющих данное характеристическое свойство, обозначают так: пишут фигурные скобки, в них — обозначение элемента множества, после него — двоеточие, а потом — характеристическое свойство.

Например, запись $A = \{x\colon -3 \leqslant x \leqslant 4\}$ означает, что множество A состоит из всех чисел x, которые удовлетворяют неравенству $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

Множество, имеющее определённое количество элементов (существует число, которое выражает количество элементов данного множества), называется **конечным**. Если множество имеет бесконечное количество элементов, его называют **бесконечным** множеством.

Множество, которое не имеет ни одного элемента, называют *пустым*. Например, множество точек пересечения двух параллельных прямых; множество квадратных уравнений, имеющих больше двух разных корней.

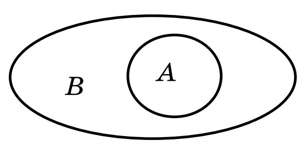
Пустое множество обозначают так: $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A содержится в множестве B, то множество A называется **подмножеством** множества B. Это записывается так: $A \subset B$ (читается: «A является подмножеством B, или A содержится в B, или B содержит A).

Например: множество учащихся вашего класса является подмножеством учащихся школы; множество жителей Москвы является подмножеством жителей России; множество звезд нашей Галактики является подмножеством множества всех звезд Вселенной.

Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само множество A.

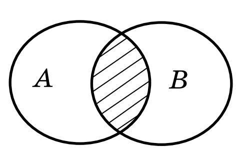
Если $A \subset B$, то наглядно это изображают с помощью диаграммы Эйлера. Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Это записывается так: $A = B$.



Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все общие элементы множеств A и B, и только их.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Пересечение множеств A и B можно изобразить с помощью диаграммы Эйлера.



$A \cap B$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В киоске продаются ручки 6 видов и тетради 5 видов. Сколькими способами можно составить пару из ручки и тетради?

____

2. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются.

____

3. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега дистанции 100 м, если все показали разное время?

____

4. Имеется 4 разных конверта без марок и 3 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправления письма?

____

5. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 6 разных цветов?

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 **34** 35 36

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

6. Найдите количество разных четырёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 5, 7 и 9, если цифры в числе не повторяются.

____

7. Из 10 туристов надо выбрать 2 туристов-дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

____

8. Найдите разложение степени бинома $(3x+2y)^4$. В ответ запишите коэффициент при x^2y^2.

____

9. Катя помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 7, 3 и 5, но не помнит, в каком порядке они расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей надо перебрать, чтобы дозвониться подруге.

____

10. Ученику дали список из 10 книг, которые надо прочитать во время каникул. Сколькими способами он может выбрать 7 книг?

____

11. Найдите коэффициент при x^2 в разложении бинома $(x+2)^5$.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Рассмотрим примеры:

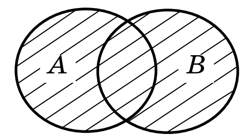
а) если $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{a,\ c,\ m,\ n,\ p\}$, то $A \cap B = \{a,\ c\}$.

б) если A — множество всех прямоугольников, B — множество всех ромбов, C — множество всех квадратов, то $C = A \cap B$.

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся хотя бы в одном из двух множеств A, B, и только их.

Объединение множеств A и B обозначается так: $A \cup B$. С помощью диаграммы Эйлера можно изобразить объединение множеств A и B.



$A \cup B$

Рассмотрим примеры:

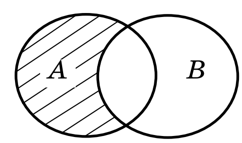
а) если $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, то $B = \{a,\ c,\ m,\ n,\ p\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, m, n, p\}$;

б) если A — множество всех прямоугольников, B — множество всех квадратов, то $A \cup B = A$.

Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество всех таких элементов множества A, которые не содержатся в множестве B.

Разность множеств A и B обозначается так: $A \backslash B$. С помощью диаграммы Эйлера можно изобразить разность множеств A и B.



$A \setminus B$

Рассмотрим примеры:

а) если $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{a,\ c,\ m,\ n,\ p\}$, то $A \backslash B = \{b,\ d\}$, $B \backslash A = \{m,\ n,\ p\}$;

б) если A — множество учащихся вашего класса, B — множество девочек вашего класса, C — множество мальчиков вашего класса, то $A \backslash B = C$, $A \backslash C = B$. В случае если B — часть множества A ($B \subset A$), то $A \backslash B$ называют дополнением к B в множестве A и обозначают $C_A B$.

Числовые множества

Множества могут состоять из любых объектов разной природы. Для математики особенно важную роль играют множества, составленные из математических объектов — чисел, геометрических фигур и др. Очень часто встречаются числовые множества, то есть множества, элементами которых являются числа. Вспомним некоторые множества чисел, с которыми вы ознакомились в курсе математики.

1. Множество натуральных чисел, то есть чисел, которые возникают в процессе счета предметов. Это множество чисел обозначают буквой N:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}.$$

В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения и умножения (вычитание и деление не всегда можно выполнить в множестве натуральных чисел, то есть результат вычитания и деления двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом).

2. Объединение натуральных чисел, чисел, противоположных натуральным, и число 0 образуют множество целых чисел, которое обозначают буквой Z:

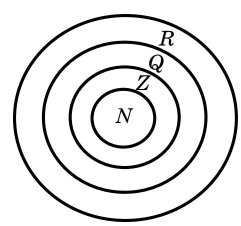
$$Z = \{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\}.$$

В этом множестве всегда можно выполнить действия сложения, вычитания и умножения. Однако частное двух целых чисел не всегда является числом целым.

3. Множество рациональных чисел (его обозначают буквой Q) — это множество чисел, которые можно представить в виде несокращаемой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$:

$$Q = \left\{x\colon x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\right\}.$$

Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической дроби. Например, $\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,(03)$. В множестве рациональных чисел всегда выполняются действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на 0). Однако квадратный корень из рационального числа не всегда является рациональным числом. Например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д.



4. Числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (или числа, представленные в виде бесконечной непериодической дроби, например, $\pi = 3{,}1415926\ldots$), образуют множество иррациональных чисел.

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел, которое обозначают буквой R.

Во множестве действительных чисел всегда можно выполнить действия сложения, вычитания, умножения, деления (кроме деления на 0), извлечения квадратного корня из неотрицательного числа.

На рисунке в виде диаграммы Эйлера даны соотношения между числовыми множествами: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перестановки

Любое упорядоченное множество, состоящее из n элементов, называется перестановкой из n элементов и обозначается P_n.

Таким образом, перестановки из n элементов отличаются между собой только порядком элементов.

Два элемента a и b можно упорядочить двумя способами: ab и ba. Это две перестановки из элементов a и b. Итак, $P_2 = 2$.

Чтобы образовать перестановки из трёх элементов a, b, c, можно третий элемент c поместить впереди пары ab, посередине пары ab и в конце пары ab:

$$cab,\ acb,\ abc.$$

Точно так из пары ba можно получить:

$$cba,\ bca,\ bac.$$

Итак, для трёх элементов существует $2 \cdot 3 = 6$ способов расположения по порядку, число перестановок из трёх элементов равно 6: $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Пусть имеем k элементов, из которых составлены все возможные P_k перестановки. Возьмем одну из них: $a_1a_2a_3...a_k$. Добавим ещё один $(k + 1)$-й элемент. Его можно поместить:

1) перед первым элементом a_1;
2) перед вторым элементом a_2;
3) перед третьим элементом a_3;
....
k) перед k-м элементом a_k;
$(k + 1)$ в конце всех элементов,
то есть всего $k + 1$ способов.

Итак, количество перестановок из $k + 1$ элементов в $(k + 1)$ раз больше, чем число перестановок из k элементов, то есть

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1).$$

$P_1 = 1;$
$P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2;$
$P_3 = P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;$
$P_4 = P_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$
$P_5 = P_4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$
....
$P_k = P_{k-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k;$
$P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \cdot (k + 1).$

Произведение натуральных чисел от 1 до данного натурального числа n называется **факториалом** числа n и обозначается $n!$ В таблице приведены значения факториала для значений n от 1 до 10.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, то есть $n!$ (читают: «эн факториал»):

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить на площадке 6 волейболистов?

Решение. $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Размещения

Любое упорядоченное подмножество из m элементов данного множества, содержащего n элементов, где $m \leqslant n$, называется размещением из n элементов по m.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначают символом A_n^m. Рассмотрим множество $\{a, b, c\}$ и выпишем размещения из элементов данного множества по два:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb.$$

Итак, $A_3^2 = 6$.

Найдём значение A_n^m.

Пусть имеем множество, содержащее n элементов. Первый элемент m-элементного подмножества можно выбрать n способами: второй элемент — $(n - 1)$ способами; третий элемент — $(n - 2)$ способами; ...; m-й элемент — $(n - m + 1)$ способами:

Итак,

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1),$$

то есть число размещений из n элементов по m элементов равно произведению m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n.

Если $n = m$, то имеем $A_n^m = P_n$, то есть перестановка — отдельный случай размещения.

Сочетания

Пусть дано множество $\{a, b, c\}$. Из элементов этого множества можно образовать 6 двухэлементных размещений:

$$ab,\ ac,\ bc,\ ba,\ ca,\ cb.$$

Это упорядоченные подмножества данного множества. А сколько неупорядоченных двухэлементных подмножеств можно составить из тех же элементов? Только три: $\{ab\}$, $\{ac\}$, $\{bc\}$.

Любое подмножество из m элементов данного множества, содержащее n элементов, называется *сочетанием* из n элементов по m элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают символом C_n^m. Например: $C_3^2 = 3$.

Из четырёх элементов множества $\{a, b, c, d\}$ можно образовать 6 сочетаний по 2 элемента:

$$\{a, b\};\ \{a, c\};\ \{a, d\};\ \{b, c\};\ \{c, d\};\ \{b, d\};$$

3 сочетания по 3 элемента: $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{b, c, d\}$.

Таким образом, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 3$.

Договорились считать, что $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.

Выведем формулу для нахождения значений C_n^m, для этого сравним числа C_n^m и A_n^m при одних и тех же значениях m и n.

Каждое m-элементное сочетание можно упорядочить P_m способами. В результате из одного сочетания образуется A_n^m размещений (упорядоченных подмножеств) из тех же элементов. Итак, число m-элементных сочетаний в P_m раз меньше, чем число размещений из тех же элементов. То есть $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$, отсюда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Число сочетаний из n элементов по m элементов равно дроби, числитель которой является произведением m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n, а знаменатель дроби — произведение m последовательных натуральных чисел.

Учитывая что $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, можно получить:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Итак,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1. Вычислите: а) C_{10}^3; б) C_{50}^{49}.

а) $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$; б) $C_{50}^{49} = \dfrac{50!}{49!(50-49)!} = \dfrac{50!}{49!} = \dfrac{49!50}{49!} = 50.$

Пример 2. Сколькими способами из 25 учащихся можно выбрать 3 дежурных?

Решение. Выбор 3 дежурных из 25 учащихся — это сочетание 3 учащихся из 25 учащихся.

Итак, $n = C_{25}^3 = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2\,300.$

Ответ: 2 300 способами.

Свойства числа сочетаний

1. Пусть дано множество, содержащее n элементов. Выберем одно сочетание из m элементов, этому сочетанию соответствует одно сочетание невыбранных $(n - m)$ элементов. Количество сочетаний из n элементов по m элементов равно C_n^m, а количество сочетаний из n элементов по $(n - m)$ элементов равно C_n^{n-m}. Поскольку каждому сочетанию выбранных m элементов соответствует одно сочетание невыбранных $(n - m)$ элементов, то $C_n^m = C_n^{n-m}$. Итак, для любых n и m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ справедливо равенство:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно из формулы числа сочетаний, если записать её с помощью факториалов:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^{n-m}.$$

Это свойство даёт возможность упростить вычисления числа сочетаний.

Пример. Вычислите C_{180}^{178}.

Решение. $C_{180}^{178} = C_{180}^2 = \dfrac{180 \cdot 179}{1 \cdot 2} = 16\,110.$

2. Рассмотрим множество, содержащее n элементов. Выделим m-элементные подмножества и разделим их на две группы: подмножества, в состав которых входит некоторый элемент a данного множества, и подмножества, в состав которых a не входит. Число подмножеств в первой группе равно C_{n-1}^{m-1}, потому что каждое такое подмножество получают присоединением к a некоторого $(m - 1)$-элементного подмножества. Число подмножеств во второй группе равно C_{n-1}^m. Итак, $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$. Это равенство можно доказать по-другому:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!\,m!} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-m)!(m-n)!} + \frac{1}{(n-m-1)!\,m!}\right) =$$

$$= (n-1)! \cdot \frac{m+n-m}{(n-m-1)!(n-m)(m-1)!\,m} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-m)!\,m!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = C_n^m.$$

3. Справедливо равенство:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Так как C_n^m — число m-элементных подмножеств некоторого множества, содержащего n элементов, то $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$ — число всех подмножеств множества из n элементов. Докажем, что число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

Пронумеруем элементы множества и для каждого подмножества данного множества построим последовательность длиной n из нулей и единиц по следующему правилу: на m-м месте пишем 1, если элемент m не входит в подмножество. Итак, каждому подмножеству соответствует своя последовательность нулей и единиц. Например, пустому множеству соответствует последовательность из одних нулей, всему множеству — последовательность из одних единиц. Число всех подмножеств равно числу всех возможных последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, и равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Треугольник Паскаля

Запишем все возможные элементы C_n^m ($n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots, n$) в виде треугольной таблицы.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & \dots & & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & \dots & \dots & & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

Учитывая свойства числа сочетаний C_n^m, а именно:

1) $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = \ldots = C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$,

эту таблицу легко записать в числовом виде:

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & 1 & & & & & & & n = 0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & n = 1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n = 2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n = 3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n = 4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n = 5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & n = 6 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}$$

Эта таблица построена так: в первой строке записана 1, во второй — по сторонам от неё по единице. В каждой последующей строке первые и последние числа — единицы, а каждое второе равно сумме двух ближайших к нему чисел сверху (свойство 2).

Следует указать, что числа ряда, расположенные на одинаковом расстоянии от его концов, равны между собой. Это следует из равенства: $C_n^m = C_n^{n-m}$. Сумма чисел m-й строки равна 2^n.

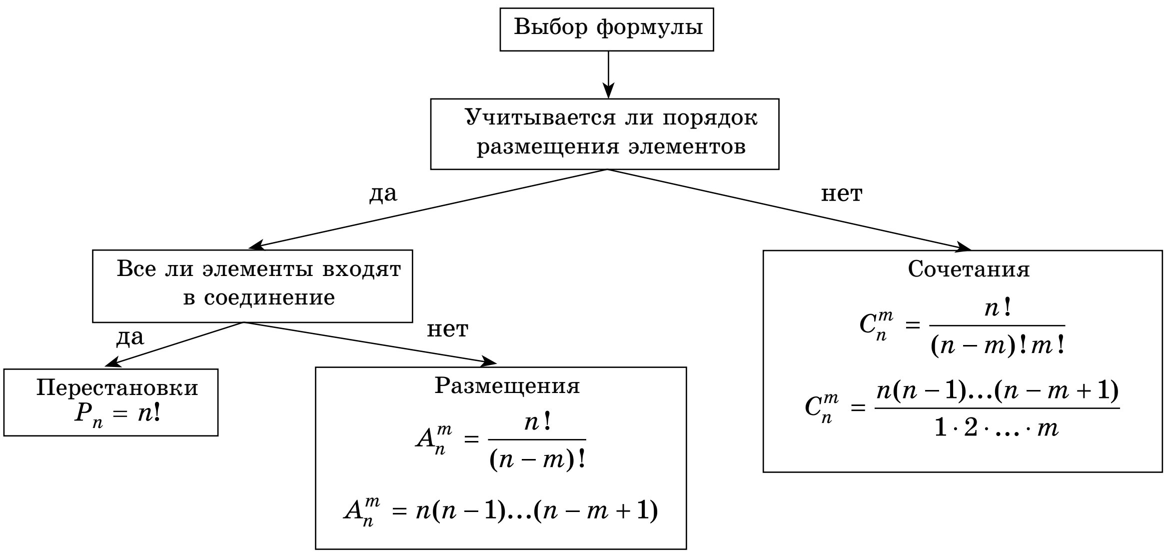
Эту треугольную таблицу называют *треугольником Паскаля* по имени французского математика Б. Паскаля (1623–1662), который занимался исследованием свойств этой таблицы и применением её к решению задач и упражнений.

Решение простейших комбинаторных задач

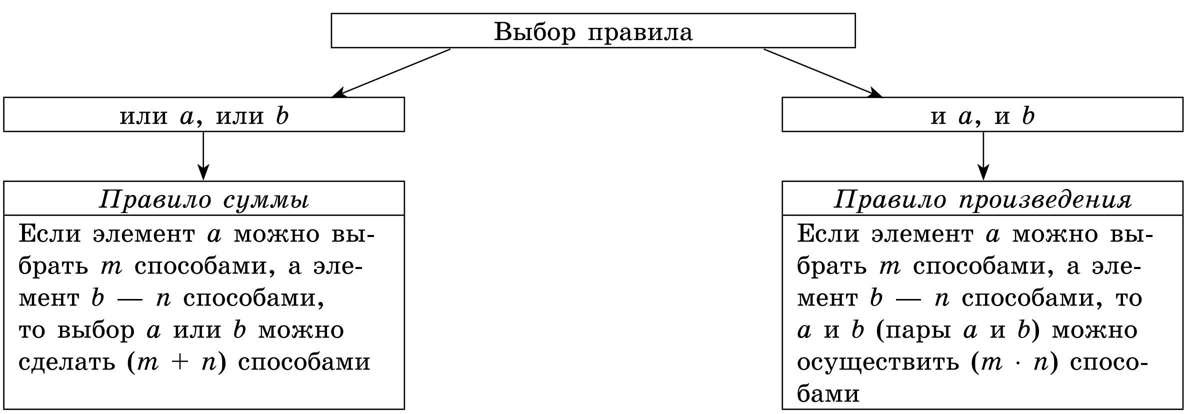
Сочетания, размещения и перестановки вместе называют **соединениями**, или **комбинациями.** Раздел математики, в котором рассматриваются свойства комбинаций, называют **комбинаторикой**, а задачи этого раздела — **комбинаторными задачами.**

При решении комбинаторных задач сначала следует определить вид соединения (см. таблицу). Напомним, что:

— перестановки отличаются друг от друга порядком расположения элементов;
— размещения отличаются или выбором элементов, или порядком их расположения;
— сочетания отличаются только выбором элементов (порядок размещения элементов не учитывается).



Комбинаторные задачи бывают разных видов. Но большинство из них решают с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.



Пример. В классе 12 мальчиков и 10 девочек.

а) Сколькими способами можно выбрать одного ученика этого класса?
б) Сколькими способами двух — мальчика и девочку?

в) Сколькими способами можно выбрать девочку?

г) Уже выбран один ученик. Сколькими способами можно выбрать после этого мальчика и девочку?

Решение.

а) Мальчика можно выбрать 12 способами, а девочку — 10 способами, тогда по правилу суммы или девочку, или мальчика можно выбрать $12 + 10 = 22$ (способами).

б) Мальчика можно выбрать 12 способами, а девочку — 10 способами, тогда по правилу произведения и девочку, и мальчика можно выбрать $12 \cdot 10 = 120$ (способами).

в) Девочку можно выбрать 10 способами.

г) Если один ученик уже выбран, то возможны три варианта:

1) если был выбран мальчик, то мальчиков осталось 11; итак, существует 11 вариантов его выбора, для девочки — 10 вариантов, для пары $11 \cdot 10 = 110$ (вариантов).

2) Если была выбрана девочка, тогда девочек осталось 9; итак, девочку можно выбрать 9 способами, мальчика — 12 способами, а пару можно выбрать $9 \cdot 12 = 108$ (способами).

По правилу суммы имеем общее количество вариантов

$11 \cdot 10 + 12 \cdot 9 = 110 + 108 = 218.$

Ответ: а) 22; б) 120; в) 10; г) 218.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ Заполните таблицу:

	$\{a, b, c\}$	n элементов
Перестановка		
Размещение		
Сочетание		

Ответы на тестовые задания к неделе 34

1 — 30. **2** — 120. **3** — 336. **4** — 12. **5** — 120. **6** — 18. **7** — 45. **8** — 216. **9** — 6. **10** — 120. **11** — 80.

НЕДЕЛЯ 35

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

6.2. Элементы статистики
- 6.2.1. Табличное и графическое представление данных
- 6.2.2. Числовые характеристики рядов данных

РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: АНАЛИЗ ДИАГРАММ И ГРАФИКОВ, АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

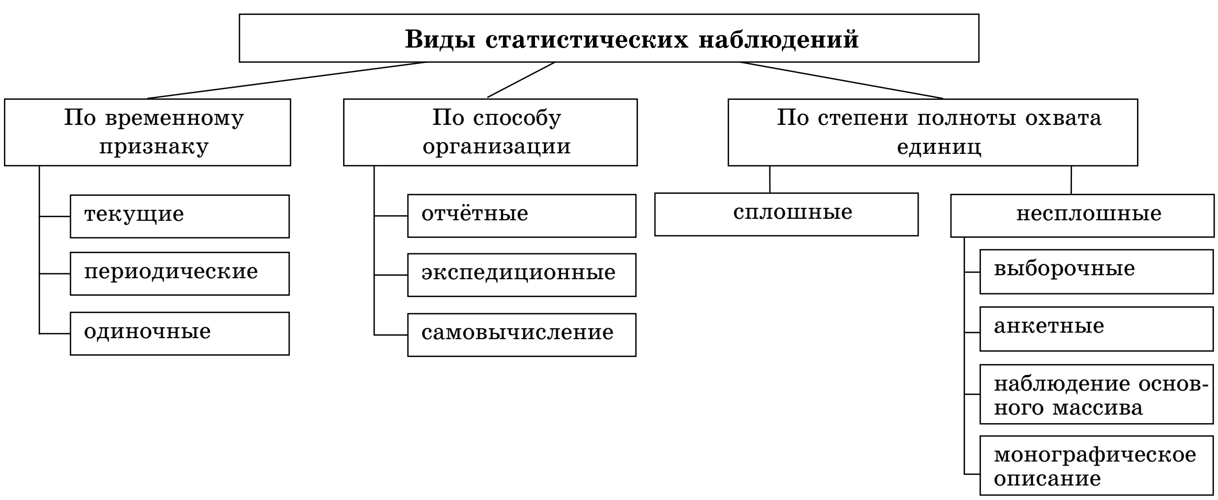
Понятие о статистике и её методах. Статистические таблицы

Статистика — наука, которая собирает, обрабатывает и изучает данные, связанные с разными массовыми явлениями, процессами, событиями. Предметом изучения статистики является изучение количественной стороны этих явлений. Статистика учит, как проанализировать информацию, выявить и оценить закономерности формирования, развития и взаимодействия сложных по своей природе социально-экономических явлений.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов. Её широко используют социально-экономические дисциплины и другие отрасли, а именно: астрономия (распределение и движение звёзд в небесном пространстве), физика (термодинамика), биология (законы наследственности), гидрология (прогноз погоды), индустрия (контроль качества изделий) и др.

Первым этапом любого исследования является сбор информации, а именно статистическое наблюдение.

Статистическое наблюдение — это спланированный, научно организованный сбор массовых данных о социально-экономических явлениях и процессах.



Примерами статистических наблюдений могут быть: ежедневный учет посещения; учет успеваемости за семестр; перепись населения; анкетирование; список религиозных общин страны; исследование финансовой деятельности инвестиционной компании; регистрация браков в загсах; опрос отдельных участников презентации; учет числа зарегистрированных преступлений; регистрация уровня цен на сельскохозяйственные продукты; телефонный опрос и др.

Самым распространённым среди видов статистических наблюдений является выборочное наблюдение. В процессе выборочного наблюдения изучается только часть совокупности, выбранная специальным методом, которая называется **выборкой**. Всю совокупность, из которой делают выборку, называют **генеральной совокупностью**. Число объектов генеральной совокупности и выборки называют соответственно **величиной генеральной совокупности и величиной выборки**.

Пример 1. Если из 1000 деталей отобраны для обследования 100 деталей, то величина генеральной совокупности $N = 1000$, а величина выборки $n = 100$.

Пример 2. Если из 20 млн граждан объектом исследования экономисты выбрали 1000 человек, то величина генеральной совокупности $N = 20$ млн чел., а величина выборки $n = 1000$ чел.

Идея выборочного наблюдения состоит в том, чтобы, анализируя отобранную определённым образом часть единиц (объектов) всей совокупности, распространить результаты и выводы на всю совокупность в целом. Суть выборочного наблюдения удачно пояснил один из директоров Института Геллапа: «...для того чтобы оценить вкус супа, совсем не обязательно съесть его полностью, необходимо хорошо перемешать его и попробовать только одну ложку».

Для того чтобы по выборке можно было с уверенностью сделать вывод о всей генеральной совокупности, необходимо, чтобы выборка достаточно точно отображала то свойство объектов генеральной совокупности, которое изучают. Выборка должна быть представительная, то есть отбор объектов в выборку производится случайно.

В результате статистического наблюдения получают материал, который характеризует отдельные элементы совокупности. После сведения и группировки статистических данных для наиболее рационального и научного вида их результатов используют статистические таблицы.

Статистические таблицы имеют подлежащее и сказуемое. **Статистическое подлежащее** — это список отдельных объектов или групп объектов. **Статистическое сказуемое** — это те признаки или показатели, которые характеризуют статистическое подлежащее.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Девочки 11 класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты: 90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140, 140.

   Найдите моду этой совокупности данных.

   ____

2. Найдите медиану совокупности выборки, представленной в задаче 2.

   ____

3. Найдите среднее значение ряда данных, представленных в задаче 2.

   ____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

4. Найдите размах заданной совокупности данных, представленных в задаче 2.

5. После летних каникул провели опрос 9 мальчиков о количестве книг, прочитанных ими за каникулы. Получили ряд чисел:

5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Найдите моду этой совокупности данных.

6. Найдите медиану совокупности выборки, представленной в задаче 6.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

По структуре подлежащего статистические таблицы подразделяются на простые, групповые и комбинационные.

В таблицах информация подается компактно, в удобной для сравнения и анализа форме. Вид таблицы зависит от цели и особенностей объекта исследования, объёма имеющейся информации.

В математической статистике вместо слова «данные» используется термин «варианта». Числовую характеристику варианты при этом называют **признаком.** Варианты, записанные в таблице в возрастающем (убывающем) порядке, называют **вариационным рядом.** Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.

Пусть выборочные данные содержат m вариант x_1, x_2, ..., x_m, причём некоторый признак X принял значение x_1 n_1 раз, значение x_1 — n_1 раз, ..., x_m — m раз. Положительное число, которое указывает, сколько раз та или иная варианта встречается, называется **частотой.**

Таблица, которая устанавливает связь между рядом вариант и соответствующими частотами, называется частотной таблицей, или **статистическим распределением.**

x_1	x_1	x_1	...	x_m
n_1	n_1	n_1	...	n_m

Здесь N — величина выборки $N = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

Пример. Производителям одежды необходимо знать, сколько одежды того или иного размера необходимо выпускать. Опросили 50 женщин, их размеры одежды такие: 44, 50, 48, 48, 52, 50, 52, 48, 46, 50, 50, 52, 54, 46, 48, 48, 54, 52, 46, 50, 52, 48, 46, 50, 52, 50, 48, 50, 54, 48, 48, 50, 52, 46, 52, 56, 50, 44, 56, 50, 52, 48, 56, 54, 46, 54, 50, 56, 54, 50. Составьте частотную таблицу.

Ответ:

Размер одежды	44	46	48	50	52	54	56
Количество женщин	2	6	10	13	9	6	4

Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения

Пусть из генеральной совокупности сделана выборка, причём x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_3 — n_3 раз, ..., x_m — n_m и $n_1 + n_2 + ... + n_m = N$ — объём выборки. Значения x_1, x_2, ..., x_m называют вариантами, последовательность вариант, записанных в возрастающем (убывающем) порядке, — вариационным рядом. Число наблюдений n_1, n_2, ..., n_m называют частотами, а их отношения к объекту выборки $\frac{n_1}{N} = p_1$, $\frac{n_2}{N} = p_2$, ..., $\frac{n_m}{N} = p_m$ — относительными частотами. Отметим, что сумма относительных частот равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_m}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Статистическим рядом распределения выборки называется список вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

Пример 1. Перейдите от частот к относительным частотам в следующем распределении выборки объёмом $N = 20$.

Варианта x_1	2	6	12
Частота n_1	3	10	7

Решение. Найдём относительные частоты: $p_1 = \frac{3}{20} = 0,15$; $p_2 = \frac{10}{20} = 0,50$; $p_3 = \frac{7}{20} = 0,35$.

Получим следующее распределение.

Варианта x_1	2	6	12
Относительная частота p_1	0,15	0,50	0,35

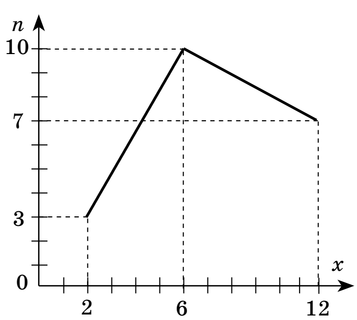
Для графического изображения статистического распределения используют полигоны и гистограммы.

Для построения полигона на оси OX откладывают значения вариант x_1, а на оси ординат — значения частот n_1.

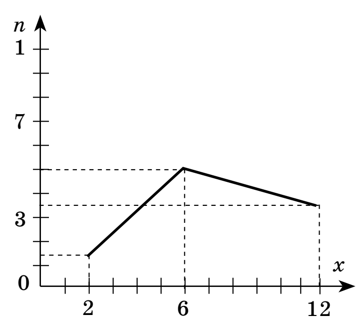
Точки (x_1; n_1) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Пример 2. Постройте полигон частот и полигон относительных частот статистического распределения из примера 1.

На рисунке *а* построен полигон частот, а на рисунке *б* — полигон относительных частот. В случае интервального распределения целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором находятся все значения наблюдаемого признака, разбивают на несколько интервалов длиной h и находят для каждого интервала n_1 — сумму частот вариант, которые попали в i-й интервал.



а



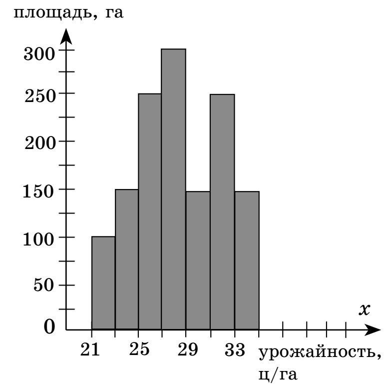
б

Урожайность, ц/га	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	31–33	33–35	Всего
Площадь, га	100	150	250	300	150	250	150	1200

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, которая состоит из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной h, а высота равна отношению $\frac{n_i}{h}$. Площадь i-го прямоугольника равна $\frac{h \cdot n_i}{h} = n_i$.

Итак, площадь гистограммы равна сумме всех частот, то есть объёму выборки.

Построим гистограмму по данным таблицы.



Мода и медиана. Средние значения

Выборка характеризуется **центральными тенденциями**: средним значением, модой и медианой. Дадим определение каждой из них. **Средним значением выборки** называется среднее арифметическое всех её значений:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \text{ или } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Мода выборки — это то её значение, которое встречается чаще всего. Обозначается Mo. **Медиана выборки** — это число, которое «разделяет пополам» упорядоченную совокупность всех значений выборки, то есть средняя величина переменного признака, который содержится в середине ряда, расположенного в порядке возрастания или убывания признака. Обозначают $M_в$.

Пример. Пусть дана выборка: 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8. Найдём центральные тенденции выборки.

Решение. Мода данной выборки $Mo = 6$, так как число 6 встречается чаще всего.

Среднее значение выборки:

$$\overline{x} = \frac{2+3+4+4+6+6+6+7+7+8}{10} = \frac{53}{10} = 5,3.$$

Медиана данной выборки $M_в = 6$, потому что выборка имеет чётное число значений и её медиана равна полусумме двух её средних значений:

$$M_в = \frac{6+6}{2} = 6.$$

Ответы на тестовые задания к неделе 35

1 — 140. **2** — 135. **3** — 130,4. **4** — 50. **5** — 4. **6** — 4.

НЕДЕЛЯ 36

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

6.3. Элементы теории вероятностей
- 6.3.1. Вероятности событий
- 6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ: ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОДСЧЁТА ЧИСЛА ИСХОДОВ

Основные понятия теории вероятностей

Первичным понятием теории вероятностей является понятие события.

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определённых условиях. События обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C... Любое событие происходит вследствие испытания (эксперимента, исследования).

Испытание — это условия, в результате которых происходит (или не происходит) событие.

Например, испытание — подбрасывание монеты, события: A — «появление герба», B — «появление числа»; испытание — подбрасывание кубика, события: A — «появление 1 очка», B — «появление 2 очков», C — «появление 3 очков», D — «появление 4 очков», E — «появление 5 очков», G — «появление 6 очков».

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти во время проведения определённого испытания.

Например: во время вытягивания наугад одной карты из колоды вы взяли короля. Событие A — «взят король» — является случайным.

Случайные события могут быть массовыми и единичными.

Массовыми называют однородные события, наблюдающиеся при определённых условиях, которые могут быть повторены (можно наблюдать) неограниченное количество раз.

Например, попадание или промах в серии выстрелов; появление бракованных деталей при серийном выпуске; радиоактивный распад атомов вещества и др.

Примером единичного случайного события является падение Тунгусского метеорита.

Теория вероятностей изучает только массовые случайные события.

Достоверным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдёт.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика натурального числа меньше 7» — является достоверным.

Невозможным называется событие, которое вследствие данного испытания не может произойти.

Например, событие A — «появление на одной из граней игрального кубика числа 7».

Полной группой событий называется множество событий, таких, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. В лотерее 30 выигрышных билетов и 270 билетов без выигрыша. Какова вероятность, что первый приобретенный билет будет выигрышным?

____

2. В коробке лежат разноцветные шары: 40 красных, 20 белых, остальные — чёрные. Сколько чёрных шаров в коробке, если вероятность выбора случайным образом чёрного шара $P(\text{ч.}) = \frac{1}{3}$?

____

3. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания в мишень одного — 0,7, другого — 0,9. Найдите вероятность того, что хотя бы один стрелок попал в цель.

____

4. Из натуральных чисел от 1 до 20 ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 20?

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Например: в испытании — бросок игрального кубика — полную группу событий составляют события:

A_1 — «появление числа 1»;
A_2 — «появление числа 2»;
A_3 — «появление числа 3»;
A_4 — «появление числа 4»;
A_5 — «появление числа 5»;
A_6 — «появление числа 6»...

или события:

B_1 — «появление чётного числа»;
B_2 — «появление нечётного числа».

Попарно несовместимые события — это события, два из которых не могут произойти одновременно.

Например, попадание и промах при одном выстреле — это два несовместных события; появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном броске игрального кубика — это шесть несовместимых событий.

Равновозможные события — это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще, чем другое, во время многоразовых испытаний, которые проводятся при одинаковых условиях.

Например, появление чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при броске игрального кубика — равновозможные события.

Если события:

1) образуют полную группу событий;
2) являются несовместимыми;
3) являются равновозможными,

то такие события образуют *пространство элементарных событий*.

Классическое определение вероятности

Рассмотрим испытание — бросок игрального кубика; пространство элементарных событий состоит из событий:

A_1 — «появление числа 1»;
A_2 — «появление числа 2»;
A_3 — «появление числа 3»;
A_4 — «появление числа 4»;
A_5 — «появление числа 5»;
A_6 — «появление числа 6».

Рассмотрим событие A — «выпало чётное число». Событию A соответствуют элементарные события:

$$A_2, A_4, A_6.$$

Отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству событий пространства элементарных событий, называется **вероятностью случайного события** A и обозначается $P(A)$.

В приведённом примере $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Итак,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где A — событие; $P(A)$ — вероятность события; n — общее количество событий пространства элементарных событий; m — число событий, которые способствуют событию A.

Это классическое определение вероятности было введено основателями теории вероятностей Б. Паскалем и П. Ферма. Вероятность достоверного события равна 1. Вероятность невозможного события равна 0.

Пример. Найдите вероятность того, что при броске двух монет выпадет два герба.

Решение. Пусть событие A — «выпало два герба».

Пространство элементарных событий состоит из четырёх событий: A_1 — «выпало два герба»; A_2 — «выпали герб и число»; A_3 — «выпали число и герб»; A_4 — «выпали два числа».

Событию A способствует только событие A_1.

Итак, $m = 1$, $n = 4$, и тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

Непосредственный подсчёт вероятностей событий значительно упрощается, если использовать формулы комбинаторики. Правильность решения задачи зависит от умения определить вид соединения, образуемого совокупностью событий, о которых идёт речь в условии задачи. Вспомним алгоритм определения вида соединений. Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — чёрные. Из урны наугад вынимают два шарика. Какова вероятность того, что они белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты два шарика) равно числу способов, какими можно вынуть 2 шарика из 20, то есть числу сочетаний из 20 элементов по 2 $(n = C_{20}^2)$. Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «вынуты два белых шарика». Это количество равно числу способов, которыми можно вынуть 2 шарика из 12 белых, то есть числу сочетаний из 12 элементов по 2 $(m = C_{12}^2)$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

5. В мастерской три станка. За рабочую смену из строя выходит не более одного. Первый выходит из строя с вероятностью 0,15, второй — с вероятностью 0,05, а третий — с вероятностью 0,1. Найдите вероятность того, что за смену ни один станок не выйдет из строя.

____

6. Среди однотипных деталей, выпускаемых в цеху, 1 % бракованных. Среди качественных деталей — 40 % деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет высшего сорта?

____

7. Прибор выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один из трёх его элементов, которые ломаются с вероятностями 0,1; 0,2 и 0,3 независимо друг от друга на протяжении некоторого времени. Найдите вероятность того, что на протяжении этого времени прибор будет работать.

____

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Итак, если событие A — «вынуты два белых шарика», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}.$$

Ответ: $\frac{33}{95}$.

Пример *2*. В урне лежат 20 шариков, из которых 12 белых, остальные — чёрные. Из урны наугад вынимают три шарика. Какова вероятность того, что среди выбранных два шарика белые?

Решение. Общее количество элементарных событий испытания (вынуты три шарика) равно $n = C_{20}^2$.

Подсчитаем количество элементарных событий, которые способствуют событию «среди трёх выбранных шариков два белых». Два белых шарика из 12 белых шариков можно выбрать C_{12}^2 способами, а один чёрный шарик можно выбрать 8 способами, тогда событию «среди трёх выбранных шариков два белых» способствуют $m = C_{12}^2 \cdot 8$ элементарных событий.

Итак, если событие A — «среди трёх выбранных шариков два белых», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}.$$

Ответ: $\frac{44}{95}$.

Пример 3. В урне лежат 15 красных, 9 синих и 6 зелёных шариков, одинаковых на ощупь. Наугад вынимают 6 шариков. Какова вероятность того, что вынуты 1 зелёный, 2 синих и 3 красных шарика?

Решение. В этой задаче испытание состоит в том, что из урны вынимают 6 шариков. Вынуть шесть шариков из 15 + 9 + 6 = 30 шариков можно $n = C_{20}^6$ способами. Нас интересует вероятность события A — «вынуты 1 зелёный, 2 синих и 3 красных шарика». Один зелёный шарик можно вынуть C_6^1 способами, 2 синих шарика можно вынуть C_9^2 способами, 3 красных шарика можно вынуть C_{15}^3 способами. Итак, событию A способствуют $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1$ элементарных событий. Тогда $P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$.

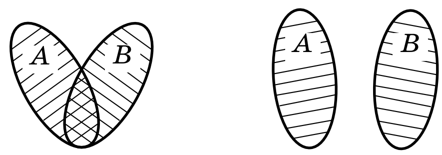
Ответ: $\frac{24}{145}$.

Операции над событиями

Вычислять вероятность событий, строя каждый раз множество элементарных событий и подсчитывая число событий, которые способствуют этому событию, иногда трудно. Поэтому для вычисления вероятностей пользуются правилами, которые позволяют по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, которые образуются из них с помощью некоторых операций.

Суммой событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении во время единичного испытания или события A, или события B, или двух событий одновременно.

Сумму двух событий обозначают так: $C = A + B$ или $C = A \cup B$.



а *б*

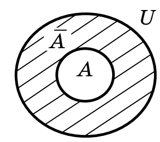
Графически сумму событий можно изобразить как объединение множеств. Сумму событий A и B, как и сумму множеств, называют **объединением**. На рисунке *а* изображено объединение (сумма) совместимых событий A и B, на рисунке *б* изображена сумма двух несовместимых событий A и B, которая состоит в выполнении или события A, или события B (одновременное появление событий A и B исключено).

Пример 1. Если событие A — «попадание в цель с первого выстрела», событие B — «попадание в цель со второго выстрела», то событие $C = A + B$ — «попадание в цель».

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. (Читается: «не A»).

Пример 2. Если событие A — «попадание в цель при выстреле», то событие $\bar{A}$ — «промах при выстреле».

Пример 3. Если событие A — «взята стандартная деталь» при испытании — наугад взята деталь из ящика, то $\bar{A}$ — «взята нестандартная деталь».

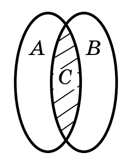


Для любого события A имеют место равенства:

$$A + U = U;\ A + A = A;\ A + \bar{A} = U;\ A + \varnothing = A.$$

Произведением событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении двух событий A и B во время единичного испытания.

Произведение двух событий A и B обозначают так: $C = A \cdot B$ или $C = AB$, или $C = A \cap B$.



Графически произведение двух событий, как и двух множеств, изображается так, как на рисунке.

Для любого события A и полной группы несовместных событий U имеют место равенства:

$$A \cdot A = A;\ A \cdot \varnothing = \varnothing;\ A \cdot \bar{A} = \varnothing;\ A \cdot U = A.$$

Пример. Если событие A — «первый стрелок попал в цель», событие B — «второй стрелок попал в цель», тогда событие $C = A \cdot B$ — «в цель попали оба стрелка».

В теории вероятностей различают простые и сложные события. Например, во время броска двух монет событие A — «на первой монете выпал герб» — является простым.

Событие называется **сложным**, если появление его зависит от появления других, простых событий. Например, во время броска двух монет событие A — «выпал хотя бы один герб» — сложное, потому что оно состоит из таких событий:

A_1 — «выпал герб только на первой монете»;

A_2 — «выпал герб только на второй монете»;

A_3 — «выпал герб на двух монетах»;

то есть

$$A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2 + A_2.$$

Вероятность сложных событий

Вероятность суммы несовместимых событий

Теорема. **Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий.**

Если $A \cap C = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1. В урне лежат 2 чёрных, 3 красных, 9 зелёных, 6 синих шариков. Из неё наугад вынимают один шарик. Какова вероятность того, что он не чёрный?

Решение. Пусть событие A — «появление не чёрного шарика», A_1 — «появление чёрного шарика», A_2 — «появление красного шарика», A_3 — «появление зелёного шарика», A_4 — «появление синего шарика». Тогда $A = A_2 + A_3 + A_4$, причём A_2, A_3, A_4 — несовместимые, $P(A_2) = \frac{3}{20}$, $P(A_3) = \frac{9}{20}$, $P(A_4) = \frac{6}{20}$. По теореме о вероятности суммы несовместимых событий получаем:

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

Ответ: $\frac{9}{10}$.

Из теоремы о вероятности суммы несовместных событий вытекают два следствия.

Следствие 1. **Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна единице.**

$$P(A_1) + PA(_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2. **Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример 2. В коробке есть 20 деталей, из которых 15 стандартных. Найдите вероятность того, что среди 3 выбранных наугад деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. Событие A — «среди выбранных деталей есть хотя бы одна стандартная», событие $\bar{A}$ — «все выбранные детали нестандартные». Согласно следствию 2 имеем: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдём $P(\bar{A})$. Общее число способов, которыми можно выбрать 3 детали из 20 деталей, равно $n = C_{20}^3$. Число нестандартных деталей $20 - 15 = 5$, из этого числа деталей можно $m = C_5^3$ способами выбрать 3 нестандартные детали.

Итак, $P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114}$.

Ответ: $\frac{113}{114}$.

Независимые события

Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет.

Пример 1. Монета бросается дважды. Вероятность появления герба в первом испытании не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании. В свою очередь, вероятность появления герба во втором испытании не зависит от результатов первого испытания. Итак, событие A — «появление герба в первом испытании» — и событие B — «появление герба во втором испытании» — независимы.

Пример 2. В урне 5 белых и 4 чёрных шарика. Из неё наугад берут шарик. Вероятность появления белого шарика (событие A) равна $\frac{5}{9}$. Взятый шарик возвращают в урну и продолжают испытание. Вероятность появления белого шарика при втором испытании (событие B) также равна $\frac{5}{9}$. В свою очередь, вероятность вынуть белый шарик при первом испытании не зависит от второго испытания. Итак, события A и B — независимы.

Вероятность произведения независимых событий

Теорема. **Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, то есть**

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. Найдите вероятность одновременного выпадения герба на двух монетах при одном броске двух монет.

Решение. Событие A — «выпал герб на первой монете», $P(A) = \frac{1}{2}$. Событие B — «выпал герб на второй монете», $P(B) = \frac{1}{2}$.

Так как события A и B независимы, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что оба охотника попадают в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

Событие $C = A \cdot B$ — «оба охотника попали в цель», тогда

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ: 0,56.

Пример 3. Два охотника стреляют в цель одновременно и независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель соответственно равны 0,7 и 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) только один из охотников попадёт в цель;

б) ни один из охотников не попадёт в цель;

в) хотя бы один охотник попадёт в цель.

Решение.

Событие A — «первый охотник попал в цель», $P(A) = 0{,}7$.

Событие B — «второй охотник попал в цель», $P(B) = 0{,}8$.

а) $C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$ — «только один из охотников попал в цель», тогда

$$P(C) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - P(B)) + (1 - P(A)) \cdot 0{,}8 =$$

$$= 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

б) $D = \bar{A} \cdot \bar{B}$ — «ни один из охотников не попал в цель», тогда

$$P(D) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

в) $F = \bar{D}$ — «хотя бы один из охотников попадёт в цель».

1-й способ

$$P(F) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

2-й способ

$F = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + AB$, тогда

$P(F) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}56 = 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}56 = 0{,}94.$

Ответ: а) 0,38; б) 0,06; в) 0,94.

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий

Во время решения задач иногда приходится определять вероятность выполнения хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$, вероятности которых известны.

Теорема. **Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ — независимы, то вероятность выполнения хотя бы одного из них может быть выражена через вероятность этих событий по формуле:**

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot ... \cdot (1 - P(A_n)).$$

Следствие. **Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то вероятность выполнения хотя бы одного из них**

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Рассмотрим применение этой теоремы к решению задач.

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трёх пушек соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,9. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех пушек.

Решение. Вероятность попадания в цель каждой из пушек не зависит от результатов стрельбы из других пушек, поэтому события A_1 – «попадание первой пушкой», A_2 — «попадание второй пушкой», A_3 — «попадание третьей пушкой» независимы. Если A — «хотя бы одно попадание», то

$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_2)) =$
$= 1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$

Ответ: 0,994.

Пример 2. В типографии находятся 4 типографские машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найдите вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Пусть событие A — «работает в данный момент хотя бы одна машина», тогда по следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - (1 - 0{,}9)^4 = 0{,}9999.$

Ответ: 0,9999.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен выполнить стрелок, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Событие A — «при n выстрелах стрелок попадёт в цель хотя бы один раз».

Согласно следствию из теоремы имеем:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$

Так как $P(A) \geqslant 0{,}9$, $p = 4$, то получим:

$1 - (1 - 0{,}4)^n \geqslant 0{,}9;$

$0{,}6^n \leqslant 0{,}1;$

$n \lg 0{,}6 \leqslant \lg 0{,}1$, так как $\lg 0{,}6 < 0$,

то $n \geq \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = \dfrac{-1}{-0{,}2218} = 4{,}5.$

Итак, $n \geqslant 5$, то есть стрелок должен сделать не меньше 5 выстрелов.

Ответ: не меньше 5.

Пример 4. Вероятность того, что событие произойдёт хотя бы один раз в трёх независимых испытаниях, равна 0,936. Найдите вероятность выполнения события в одном испытании, если известно, что во всех испытаниях вероятность выполнения события одна и та же.

Решение. Согласно следствию из теоремы:

$P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

По условию, $P(A) = 0{,}936$, $n = 3$, тогда

$0{,}936 = 1 - (1 - p)^3$; $(1 - p)^3 = 0{,}064$; $1 - p = 0{,}4$; $p = 1 - 0{,}4$; $p = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

Зависимые события

Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от появления или непоявления второго события.

Пример. В ящике 100 деталей: 80 стандартных и 20 нестандартных. Наугад берут одну деталь, не возвращая её. Если появилась стандартная деталь (событие A), то вероятность появления стандартной детали при втором испытании (событие B) $P(B) = \frac{79}{99}$; если же в первом испытании вынут нестандартную деталь, то вероятность $P(B) = \frac{80}{99}$. Итак, вероятность появления события B зависит от появления или непоявления события A. События A и B — зависимые.

Пусть события A и B — зависимые, и событие A уже произошло.

Число, которое выражает вероятность события B при условии что событие A уже произошло, называется **условной вероятностью** события B относительно события A и обозначается $P(B \backslash A)$ или $P_A(B)$.

Пусть k — количество всех элементарных событий, которые способствуют событию A;

n — количество всех элементарных событий некоторого испытания;

m — количество элементарных событий, которые способствуют событию B;

r — количество элементарных событий, которые способствуют событию $A \cdot B$ ($r \leqslant k$ и $r \leqslant m$).

Если событие A произошло, то это означает, что произошло одно из элементарных событий, которые способствуют событию A. При этом событию B способствуют r и только r событий, которые способствуют событию $A \cdot B$.

Поэтому $P_A(B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, отсюда $P(A \cdot B) = P_A(B) \cdot P(A)$.

Вероятность произведения зависимых событий

Теорема. **Вероятность произведения зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события, если первое уже произошло.**

Пример 1. В урне 3 белых и 7 красных шариков. Наугад вынимают один шарик, а потом второй. Найдите вероятность того, что из вынутых шариков первый будет белым, а второй — красным.

Решение. Событие A — «первым взят белый шарик», $P(A) = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что второй из шариков будет красным (событие B), найдена при условии что первый — белый, то есть условная вероятность равна $P_A(B) = \frac{7}{9}$.

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Ответ: $\frac{7}{30}$.

Независимые испытания. Схема Бернулли

Взаимно независимыми называются такие испытания, в которых вероятность результата каждого из них не зависит от того, какие результаты имеют или будут иметь остальные испытания.

Многие задачи в теории вероятностей приводятся к следующей схеме, которая называется схемой Бернулли: происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может случиться или не случиться. Вероятность выполнения события A в каждом испытании одинакова и равна p, а вероятность невыполнения события A $q = 1 - p$. Необходимо найти вероятность $P_{m,\,n}$ того, что событие A случится m раз в этих n испытаниях.

Искомую вероятность можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}.$$

Выведение формулы Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A случится m раз и не случится $n - m$ раз, по теореме о произведении вероятностей независимых событий равна $p^m q^{n-m}$.

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить комбинаций из n элементов по m элементов, то есть C_n^m.

Так как эти сложные события несовместимы, то по теореме сложения вероятностей несовместимых событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Так как вероятность всех сложных событий одинакова, то искомая вероятность (случится m раз событие A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события $p^m q^{n-m}$, умноженной на их число C_n^m, то есть

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$$

или

$$P_{m,\,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на протяжении суток не превышает установленной нормы, равна 0,75. Найдите вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии на протяжении 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых 6 суток постоянна и равна $p = 0{,}75$. Итак, вероятности перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянны и равны

$q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_{4,\,5} = C_6^5 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}30.$$

Ответ: 0,30.

П р и м е р 2. Какова вероятность того, что при десяти бросках игрального кубика 3 очка выпадет 2 раза?

Решение. В этой задаче $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, и тогда

$$P_{2,\,10} = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5^{8}}{6^{10}} \approx 0,29.$$

Ответ: $\approx 0,29$.

Статистическое определение вероятности

Вероятность случайного события мы определили как отношение количества событий, которые способствуют этому событию, к количеству всех равновозможных несовместимых событий, образующих полную группу событий во время определённого испытания. Такое определение вероятности называется классическим.

Классическое определение вероятности имеет определённые недостатки, а именно:

1) с помощью этого определения можно вычислять вероятность только для конечного количества элементарных событий;
2) в случае бесконечного количества элементарных событий определение использовать невозможно;
3) вычисление количества элементарных событий иногда очень громоздкое;
4) вывод о равновозможности элементарных событий делается без логических обоснований.

Поэтому наряду с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности.

Проведём испытание — подбрасывание монеты. Во время одноразового проведения испытания мы никаких закономерностей не заметим. Закономерности начинают выявляться тогда, когда эксперимент выполняют много раз в одинаковых условиях. В таблице приведены результаты экспериментов с подбрасыванием монеты, проведённых разными исследователями.

Исследователь	Ж. Бюффон	О. де Морган	К. Пирсон	В. Феллер	У. Джевонс	В. Романовский
Количество подбрасываний монеты — n	4040	4092	12 000	10 000	20 450	50 640
Количество выпаданий герба — m	2048	2048	6019	4979	10 379	40 151
Отношение $\frac{m}{n}$	0,5069	0,5005	0,5010	0,4979	0,5068	0,4979

Из таблицы видно, что отношение $\frac{m}{n}$, то есть отношение количества выпаданий герба к общему количеству бросков монеты, колеблется около числа 0,5. Данные таблицы показывают, как предвидение того, что герб выпадет с вероятностью 0,5, хорошо согласуется с исследованием.

Дадим статистическое определение вероятности.

Пусть n — количество всех испытаний в отдельной серии испытаний, а m — количество тех испытаний, в которых происходит событие A. Отношение $\frac{m}{n}$ называется относительной частотой события A в данной серии испытаний. Выясняется, что в разных сериях испытаний соответствующие частоты $\frac{m}{n}$ для больших n практически совпадают, колеблясь около некоторого постоянного значения $P(A)$, которое называется **статистической вероятностью** события:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ или } P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Понятие статистической вероятности широко используется в биологии, медицине, инженерном деле, экономике и других науках.

Пример. Количество рыб в озере неизвестно. Из озера поймали n рыб и пометили их, а затем выпустили в озеро. Через несколько дней в такую же погоду снова забросили невод и в нем оказалось m рыб, из которых k помеченных. Укажите приблизительное количество рыб в озере.

Решение. Пусть событие A — «пойманная рыба помечена», тогда $P(A) = \frac{k}{m}$. Но если в озере x рыб, среди которых n рыб помечены, то $P(A) = \frac{n}{x}$. Итак, $\frac{k}{m} = \frac{n}{x}$, отсюда $x = \frac{mn}{k}$.

Ответ: $\frac{mn}{k}$.

Закон больших чисел

На практике нередко бывает трудно определить, какова вероятность какого-нибудь события. В то же время можно на основании испытаний (наблюдений) сказать, какова частота появления события, если одно и то же испытание повторяется много раз.

Еще Якоб Бернулли (1655–1705), известный швейцарский математик, заметил следующую интересную закономерность, которая носит название «закона больших чисел»: чем больше выполняется однотипных испытаний, тем ближе частота появления события к вероятности этого события. Точнее, **теорема Бернулли** утверждает: если в ряде испытаний вероятность некоторого события остается для каждого испытания постоянной и равной p, то при достаточно большом количестве испытаний практически вероятно, что частота $\frac{m}{n}$ появления события отличается от её вероятности меньше, чем на сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.

Итак, теорема Бернулли математически подтверждает нашу интуитивную убежденность в том, что при большом количестве испытаний должно выполняться приближенное равенство $\frac{m}{n} \oplus p$.

В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события его частоту, вычисленную при достаточно большом количестве испытаний.

Пример. Рассматривая данные о рождении детей, можно сделать вывод: частота рождения мальчиков при достаточно большом количестве наблюдений за рождаемостью близка к числу 0,511, поэтому это число и принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать демографические прогнозы.

Решение задач

Для решения задач на нахождение вероятностей одного события из условия, что другое произошло, используют определённый алгоритм.

1. Обозначить все события, о которых идёт речь в задаче.
2. Выяснить и записать символами то, что известно по условию задачи, и то, что необходимо найти.
3. Выразить событие, вероятность которого необходимо найти, через события, вероятности которых известны или их легко можно найти.
4. Вычислить искомую вероятность, используя изученные теоремы, определения.

Пример. В шкатулке лежат 6 шаров, 3 из которых — красные. Наугад взяты 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара — красные?

Решение.

1-й способ. Пусть событие A — «взятые два шара — красные»; n — количество возможностей выбора двух шаров из шести, $n = C_6^2$; m — количество возможностей выбора двух красных шаров из трёх, $m = C_3^2$, тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_6^3} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

2-й способ. Пусть событие A — «первый взятый шар — красный», $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; событие B — «второй взятый шар — красный», $P(B) = \frac{2}{5}$; событие C — «оба взятых шара — красные», тогда $C = A \cdot B$.

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

♦ **Заполните схемы:**

События A и B — совместимы

Да

$P(A + B) =$

Нет

$P(A + B) =$

События A и B — зависимы

Да

$P(AB) =$

Нет

$P(AB) =$

Ответы на тестовые задания к неделе 36

1 — 0,1. **2** — 30. **3** — 0,97. **4** — 0,3. **5** — 0,7. **6** — 0,396. **7** — 0,504.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К РАЗДЕЛУ «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

1. Вероятность попадания в цель первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым — 0,6. Найдите вероятность того, что только один из стрелков попадёт в цель.

2. Изделия содержат 5 % брака. Найдите вероятность того, что среди пяти изделий будут два бракованных. Результат запишите с точностью до тысячных.

3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

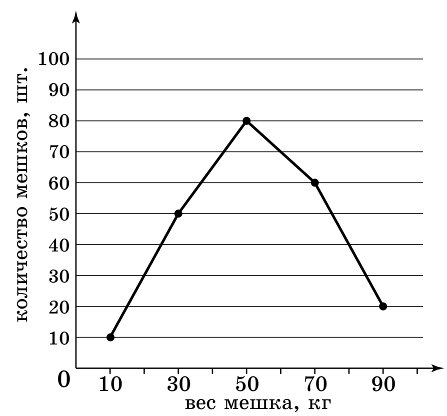
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ № 2

Часть 1

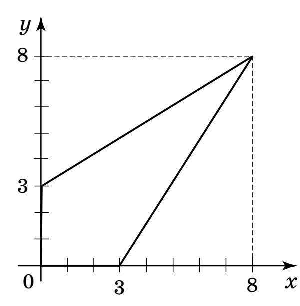
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

1. Стоимость одной из акций на бирже поднималась в понедельник и во вторник на $20\,\%$ в день, а в среду упала на $50\,\%$. Найдите стоимость акции (в у. е.) в среду вечером, если в понедельник утром она стоила 150 у. е.

2. На рисунке жирными точками показано количество мешков с цементом различного веса, купленных в строительном супермаркете в течение дня. По горизонтали указывается вес мешка в кг, а по вертикали — количество купленных мешков данного веса. Определите, мешок с цементом какого веса (в кг) пользовался в течение дня наибольшим спросом.



3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0;0), (0;3), (8;8), (3;0) (см. рис.).

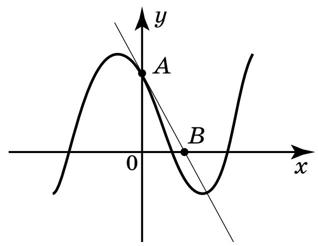


4. Вероятность того, что баскетболист попадёт мячом в корзину ровно два раза из трёх вычисляется по формуле $P(x) = 3x^2(1 - x)$, где x — вероятность попадания мячом в корзину при одной попытке. Вычислить вероятность того, что баскетболист, трижды бросая мяч, попадёт в корзину ровно два раза, если $x = 0{,}8$.

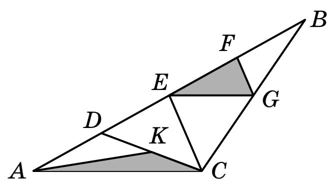
5. Найдите корень уравнения $6+2\sqrt{x}=24$.

6. Высота равнобедренной трапеции равна 8, а её основания — 3 и 13. Найдите тангенс острого угла трапеции.

7. На рисунке изображён график функции $y=x^3-2x^2+ax+6$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $A(0;\ 6)$. Найдите значение параметра a, если касательная пересекает ось абсцисс в точке $B(1{,}2;\ 0)$.



8. Площадь треугольника ABC равна 20. Точки D, E, F, G, K — середины отрезков AE, AB, EB, BC, DC соответственно (см. рис.). Найдите сумму площадей треугольников AKC и EFG.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 144}{\log_3 \sqrt{12}}$.

10. Бригада выполняет работу в срок. Если в бригаду придут ещё 12 человек, то работа будет выполнена на 3 дня раньше срока, а если уйдут 4 рабочих, то на 5 дней позже срока. Сколько человек в бригаде?

11. Два кондитера выпекают за 2 часа 27 тортов, работая вместе. Сколько тортов приготовит первый кондитер за 1 час, если производительность его труда в 2 раза превышает производительность труда второго кондитера?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=x^4-8x^2-20$.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. Решите неравенство $\log_2(9-2^x)\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\log_{0,25}(3-x)}$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота равна 18, а сторона основания равна 16. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SD проведено сечение. Найдите расстояние от вершины пирамиды S до плоскости сечения.

15. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x^2-2x\right)\cdot\operatorname{ctg}1=\operatorname{ctg}\left(15\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

16. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC. Четырёхугольник $MBCN$ вписан в окружность радиуса $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка AM, если $BC = 3$, $AM : MB = 2 : 1$, $\angle BAC = 30°$.

17. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом ещё на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена первого товара меньше первоначальной цены второго товара.

18. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-9}+x^2=a^2+4a+4,\\ \sqrt{1-x^2}\sqrt{y^2-9}-y^2=4a-1\end{cases}$$

имеет два решения?

19. Найдите все натуральные числа M, для которых два из трёх приведённых утверждений истинны, а одно — ложное.

1. Число $M + 41$ — квадрат натурального числа.
2. Число $M - 51$ делится на 10 без остатка.
3. Число $M - 48$ — квадрат натурального числа.

Тренировочный тест № 2

Ответы к тренировочному тесту № 2

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	108	**7**	–5
2	50	**8**	5
3	24	**9**	4
4	0,384	**10**	8
5	81	**11**	9
6	1,6	**12**	–36

13. *Ответ:* $x \in [0; 3)$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Верно использовано основное логарифмическое тождество, но допущены ошибки при решении неравенства.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

14. *Ответ:* 9,6.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения расстояния правильный, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

15. *Ответ:* $x = 1 \pm \sqrt{2 + \pi k}$, $k \in N \cup \{0\}$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

16. *Ответ:* $AM = 2\sqrt{3}$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно рассмотрен треугольник, к которому применена теорема косинусов для нахождения длины отрезка AM, но допущены ошибки при решении уравнения.	2
Верно рассмотрен треугольник, к которому применена теорема синусов для нахождения его угла.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

17. *Ответ:* 9,2.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для первоначальной цены, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
Ответ получен, решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности, в результате которых ответ может быть неверным.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

18. *Ответ:* $a = -2$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ получен, решение в целом верное, но либо недостаточно обоснованное, либо содержит вычислительные погрешности, в результате которых ответ может быть неверным.	3
Ответ неверный, но решение содержит переход от исходной системы уравнений к уравнению с двумя переменными и его геометрической интерпретацией.	2
Верно получены соотношения между переменными x и y, используя область определения степенной функции.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

19. *Ответ:* $M = 1984$.

Указания к оцениванию	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Рассмотрены два истинных утверждения, сделаны правильные выводы относительно числа M, но недостаточно обоснована его единственность.	3

Рассмотрено только одно из истинных утверждений и сделаны правильные выводы относительно числа M.	2
Обоснованно и верно выделены истинные два из трёх приведённых утверждений, но не сделано никаких дальнейших выводов.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

Тестовые задания к разделу «Алгебра»

1	9	**5**	4
2	$\frac{96}{1-x^{96}}$	**6**	$a=-26,\ b=-24$
3	28	**7**	-2
4	9,2	**8**	$\frac{3+b}{2(3a-ab+2b-3)}$

Тестовые задания к разделу «Уравнения и неравенства»

1	1
2	$\pi k,\ k\in Z$
3	2
4	При $a\neq 0$ $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}+\pi n,\ n\in Z;$ При $a=0$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$
5	$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \ 2\pi m,\ m\in Z$
6	При $a\in(0;\sqrt{5}]$ $x=\frac{a^4+2a^2+25}{a^2};$ При $a\notin(0;\sqrt{5}]$ корней нет

Тестовые задания к разделу «Функции» и «Начала математического анализа»

1	$[\log_{0,5}6; -2]$
2	чётная
3	[1; 3]
4	30
5	0
6	(1; 1)

Тестовые задания к разделу «Геометрия»

1	3
2	8
3	$\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$
4	$\frac{25S}{36}$
5	$\frac{ab\sqrt{2}}{4}$
6	$\frac{10}{7}$

Тестовые задания к разделу «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»

1	0,44
2	0,021
3	не менее 5

Справочное издание
анықтамалық баспа

ЕГЭ. НЕДЕЛЯ ЗА НЕДЕЛЕЙ

Роганин Александр Николаевич
Захарийченко Юрий Алексеевич
Захарийченко Лилия Игоревна

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
Пошаговая подготовка
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Россия, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru

Интернет-магазин : www.book24.kz
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 04.06.2020. Формат $84x108^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,6.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-112892-0
9 785041 128920 >

6+

Москва. ООО «Торговый Дом «Эксмо»
Адрес: 123308, г. Москва, ул. Зорге, д.1.
Телефон: +7 (495) 411-50-74. **E-mail:** reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми
покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**

International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном
оформлении, обращаться по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2261.
E-mail: **ivanova.ey@eksmo.ru**

Оптовая торговля бумажно-беловыми
и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:
Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс: +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: www.**kanc-eksmo.ru**

Филиал «Торгового Дома «Эксмо» в Нижнем Новгороде
Адрес: 603094, г. Нижний Новгород, улица Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза»
Телефон: +7 (831) 216-15-91 (92, 93, 94). **E-mail**: reception@eksmonn.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Санкт-Петербурге
Адрес: 192029, г. Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, д. 84, лит. «Е»
Телефон: +7 (812) 365-46-03 / 04. **E-mail**: server@szko.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Екатеринбурге
Адрес: 620024, г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ
Телефон: +7 (343) 272-72-01 (02/03/04/05/06/08)

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Самаре
Адрес: 443052, г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»
Телефон: +7 (846) 207-55-50. **E-mail**: RDC-samara@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Ростове-на-Дону
Адрес: 344023, г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, 44А
Телефон: +7(863) 303-62-10. **E-mail**: info@rnd.eksmo.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Новосибирске
Адрес: 630015, г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3
Телефон: +7(383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

Обособленное подразделение в г. Хабаровске
Фактический адрес: 680000, г. Хабаровск, ул. Фрунзе, 22, оф. 703
Почтовый адрес: 680020, г. Хабаровск, А/Я 1006
Телефон: (4212) 910-120, 910-211. **E-mail**: eksmo-khv@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Тюмени
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Тюмени
Адрес: 625022, г. Тюмень, ул. Пермякова, 1а, 2 этаж. ТЦ «Перестрой-ка»
Ежедневно с 9.00 до 20.00. Телефон: 8 (3452) 21-53-96

Республика Беларусь: ООО «ЭКСМО АСТ Си энд Си»
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Минске
Адрес: 220014, Республика Беларусь, г. Минск, проспект Жукова, 44, пом. 1-17, ТЦ «Outleto»
Телефон: +375 17 251-40-23; +375 44 581-81-92
Режим работы: с 10.00 до 22.00. **E-mail:** exmoast@yandex.by

Казахстан: «РДЦ Алматы»
Адрес: 050039, г. Алматы, ул. Домбровского, 3А
Телефон: +7 (727) 251-58-12, 251-59-90 (91,92,99). E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Украина: ООО «Форс Украина»
Адрес: 04073, г. Киев, ул. Вербовая, 17а
Телефон: +38 (044) 290-99-44, (067) 536-33-22. **E-mail**: sales@forsukraine.com

ЕГЭ

НЕДЕЛЯ ЗА НЕДЕЛЕЙ

В пособии представлена уникальная пошаговая система подготовки к ЕГЭ, разработанная опытными педагогами. Все материалы школьного курса математики чётко структурированы и разделены на 36 логических блоков (недель). Изучение каждого блока рассчитано на 2-3 самостоятельных занятия в неделю в течение учебного года.

Занимаясь всего 2-3 часа в неделю, вы сможете достичь высокого результата на ЕГЭ без репетиторов!

МАТЕМАТИКА

ПОШАГОВАЯ ПОДГОТОВКА

ПОСОБИЕ ПОМОЖЕТ:

- организовать и структурировать подготовку к ЕГЭ;
- пошагово изучить теоретический материал по предмету;
- отработать навыки выполнения заданий разных типов;
- систематизировать и оценить знания.

ISBN 978-5-04-112892-0